EXTREMÁLIS PROBLÉMÁK POZITÍV DEFINIT FÜGGVÉNYEKRE ÉS POLINOMOKRA

MTA doktori értekezés tézisei

Révész Szilárd György

Budapest, 2009.

EXTREMÁLIS PROBLÉMÁK POZITÍV DEFINIT FÜGGVÉNYEKRE ÉS POLINOMOKRA*

Doktori értekezés tézisei

RÉVÉSZ SZILÁRD GYÖRGY

I. A kitűzött kutatási feladatok ismertetése

Az értekezés három, a klasszikus analízis területéhez tartozó problámát jár körbe. Mindhárom kutatási problémára különböző általam meghallgatott előadások irányították a figyelmemet. Az 1. Fejezetben tárgyalt Turán (és Erőd-) féle fordított Markov típusú egyenlőtlenség kérdésére 2003-ban Nashvilleben Jevgenyíj Poletszkíj (és később Budapesten Erdélyi Tamás) egy-egy előadása, a 2. Fejezetben tárgyalt ún. Turán féle extremális problémára Vitalíj Aresztov 2001-es jereváni előadása, végül a 3. Fejezet tárgyára – idempotens polinomok koncentrációjára – John Marshall Ash egy 2005-ös Marseille-ben tartott előadása. A témával foglalkozó szerzőktől "első kézből" kapott személyes benyomások nagyon fontosak voltak érdeklődésem felkeltésében, de azért az általuk nem éppen reményteljesnek tekintett úton indultam el. A három problémakörben kettő esetében az addigi szerzők kifejezetten az ellenkezőjét sejtették annak, mint ami végül kiderült. A pozitív definit függványekre vonatkozó Turán problémában viszont nem született meglepő eredmény, inkább az jelentett előrelépést, hogy az addigi eléggé speciális eredmények után nagyobb általánosságot sikerült megragadni.

I.1. Fordított Markov egyenlőtlenségek a komplex síkon. Turán Pál [47] és még ugyanabban az évben munkáját folytatva Erőd János [20] 1938-ban kezdték vizsgálni a komplex síkon fekvő tartományokra jól ismert Markov egyenlőtlenség megfordításának kérdését. Ha $K \Subset \mathbb{C}$ összefüggő, konvex, nem egypontú kompakt részhalmaz a síkon, akkor minden legfeljebb n-edfokú p polinomra – jelben $p \in \mathcal{P}_n$ – a Markov egyenlőtlenség szerint $\|p'\|_\infty \leq Cn^2\|p\|_\infty$, ahol itt és a továbbiakban is a $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|$ maximum norma alatt most a K-n vett maximum értendő. Ha pl. $K = I := [-1, 1]$ intervallum, akkor ennél nem

*Az „Extremal problems for positive definite functions and polynomials” című, angol nyelven írott disszertáció tézisei is mondható jobb: ha azonban K egy konvex *tartomány*, akkor itt Cn is írható Cn^2 helyett.

Turán kérdésfelvetése fordított: *legalább* mekkorának kell lennie a derivált normájának? Ehhez persze valami megszorítást tennünk kell, mert önmagában a kérdés nem értelmezhető, hiszen a derivált eltünteti a polinom konstans tagját, márpedig alkalmasan nagy c konstanssal $\|p+c\|_\infty$ akármilyen naggyá tehető, miközben a derivált normája változatlan. Turán természetes normalizálása tehát így hangzott: tegyük fel, hogy $p \in \mathcal{P}_n(K)$, ahol $\mathcal{P}_n(K)$ a pontosan n-edfokú polinomoknak azon részosztálya, amelyben a polinomoknak minden (multiplicással együtt pontosan n – algebra alaptétele!) gyöke K-ban található. Ekkor ugye $p(z) = c_0 \prod_{j=1}^n (z - z_j)$, és egy ilyen polinom normája és derivált normája nyilván összefügg, bizonyos korlátok között becsülhető. Nyilván c_0 értéke a két norma összehasonlításának szempontjából irreleváns. Felfoghatjuk úgy a kérdést, hogy $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ vektorokra definiáljuk azt a két normát, amit a $\|p\|$ és a $\|p'\|$ meghatároz, és az utóbbinak az előbbihez mért nagyságával a polinom oszcillációját jellemezzük. Tehát jelölje

$$M_n(K) := \inf_{p \in \mathcal{P}_n(K)} M(p) \qquad \text{ahol} \qquad M := M(p) := \frac{\|p'\|}{\|p\|} \,, \tag{1}$$

akkor $M(p)$ a polinom oszcillációjának, $M_n(K)$ pedig az n-edfokú polinomok K-n mutatkozó minimális oszcillációjának a mértéke.

Turán megmutatta [47], hogy a D egységkörre $M_n(D) = n/2$ (ami egyébként meglepően közel esik a Bernstein egyenlőtlenségként közismert, de pontos formájában Riesz Marcelltől [40] származó felső becslésben szereplő n-hez!), és $M_n(I) = c\sqrt{n}$, ahol ez konstans szorzótól eltekintve pontos is. Erőd J. [20] kiszámolta a c konstans értékét (minden n-re pontosan!), és további komplex tartományokon vizsgálta Turán kérdését, megmutatva pl. hogy a $[-1, 1]$ főtengelyű és $[-bi, +bi]$ kistengelyű E_b ellipszis tartományra $M_n(E_b) = bn/2$.

Már Turánnál megjelenik, és expliciten Levenberg és Poletszkíj mondja ki, hogy a következő "bekeríthetőségi tulajdonság" fontos szerepet játszik a kérdésben.

1. Definíció. Egy $K \Subset \mathbb{C}$ kompakt halmaz *R-bekeríthető*, ha tetszőleges $z \in \partial K$ határpontra van olyan R sugarú D_R kör, amelyre $z \in \partial D_R$ és $K \subset D_R$.

Turán észrevétele, amely pl. a D egységkör esetét egyből elintézi, hogy $p'/p(z) = \sum 1/(z - z_j)$ fix $z \in \partial D$ esetén a valós részeken keresztül alulról becsülhető, mivel a $w(\zeta) := 1/(1-\zeta)$ leképezés $\zeta \in D$-re olyan pontot ad, amely a $\Re w \geq 1/2$ félsíkba esik, azaz

$$\left|\frac{p'}{p}(z)\right| \geq \Re z\frac{p'}{p}(z) = \sum_j \Re\frac{1}{1-z_j/z} \geq n\cdot\frac{1}{2}.$$

Ugyanez $zp'(z)/p(z)$-vel minden körsugár esetén megy, tehát $|p'(z)/p(z)|$-re $n/2R$-et kapunk. Ha tehát K R-bekeríthető tartomány, $p \in \mathcal{P}_n(K)$ és p' a normáját a $z \in \partial K$ pontban éri el, akkor ott felvesszük a D_R kört, alkalmazzuk a fenti becslést, és máris azt kapjuk, ld. [34, Theorem 2.2], hogy

2. Tétel (Erőd; Levenberg-Poletsky). *Ha K egy R-bekeríthető halmaz, és $p \in \mathcal{P}_n(K)$, akkor*

$$\|p'\| \geq \frac{n}{2R}\|p\| \,. \tag{2}$$

Erőd János [20] észrevette, hogy a határgörbe görbülete fontos szerepet játszhat az oszcillációs becslésekben. Többek között megmutatta azt is, hogy ha a görbület egy fix konstans felett marad, akkor az oszcilláció nagyságrendje cn. (A bizonyítás kicsit hiányos és nem ad pontos konstansot, de alapvetően helyes és a geometriai észrevétel különösen értékes: erről bővebben lásd [52]).

A bizonyítás direkt számolással történik, ezért is nem olyan precíz és nehezen követhető. Valahogyan Erőd János nem figyelt fel az akkor pedig már közismert Blaschke féle tételre, ami a fent megfogalmazott definíciónkkal a következő elegendő feltételt adja arra nézvést, hogy egy tartomány R-bekeríthető legyen.

3. Lemma (Blaschke). *Ha $K \subset \mathbb{C}$ konvex síktartomány, melynek $\gamma := \partial K$ határgörbéje sima és görbülete minden $z \in \gamma$ pontban teljesíti a $\kappa(z) \geq \kappa_0 > 0$ feltételt, akkor K $R := 1/\kappa_0$ mellett R-bekeríthető.*

Így leírva tehát egyszerűen adódik egy pontosabb változat a fenti Erőd J. tételre.

4. Következmény (Erőd). *Ha $K \subset \mathbb{C}$ konvex síktartomány, melynek $\gamma := \partial K$ határgörbéje sima és görbülete minden $z \in \gamma$ pontban teljesíti a $\kappa(z) \geq \kappa_0 > 0$ feltételt, akkor $M_n(K) \geq (\kappa_0/2)n$.*

Ugyanakkor Erőd J. sokkal tovább is ment: pl. olyan konvex síktartományokra is igazolta a cn nagyságrendű oszcillációt, amelyeknek a határán kisebb egyenes szakaszok is lehetnek, csak az a kikötés, hogy egy-egy ilyen határszakasz hossza a tartomány *transzfinit átmérőjének* negyedét ne haladja meg. Amúgy a tartományról Erőd azt teszi fel, hogy véges sok sima (legalább C^2) Jordan ív határolja, amelyek vagy (a fenti értelemben rövid) egyenes szakaszok, vagy olyan ívek, amelyek mentén a görbület egy fix pozitív alsó korlát felett marad.

Az egyenes szakaszokra vonatkozó eset tárgyalása már csak egy másik gondolat, a Csebisev lemma felhasználásával lehetséges, amelyet Fabertől [21] idéz.

5. Lemma (Csebisev). *Legyen $J = [u, v]$ tetszőleges intervallum a komplex síkon, $u \neq v$ és $J \subset R \subset \mathbb{C}$ tetszőleges halmaz, ami tartalmazza J-t. Akkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ mellett*

$$\min_{w_1,\dots,w_k\in R}\max_{z\in J}\left|\prod_{j=1}^{k}(z-w_j)\right| \geq 2\left(\frac{|J|}{4}\right)^k . \tag{3}$$

E két fenti lemmában megfogalmazható gondolat illetve megközelítés kombinálásával kapja Erőd J. a fentebb idézett legáltalánosabb tételét. Erőd J. felteszi azt a kérdést is: "mely tartományokra működik Turán módszere"? (Itt pontosabb volna azt kérdezni, kettőjük módszere ...) Nyilván sejtette, hogy *sok* tartományra igaznak kell lennie a cn-es oszcillációnak, de annak nincsen nyoma, hogy *teljes általánosságban* ezt sejtette volna. Cikke azonban lényegében feledésbe merült, illetve sokan idézték, de csakis az intervallumra vonatkozó pontos konstans kiszámításának vonatkozásában. A komplex síkon pedig nem nagyon születtek eredmények: pár évvel ezelőttig mindössze egy (később Erőd J. korábbi munkája miatt visszavont) újabb bizonyítás született az ellipszis esetére, és azon felül a négyzetre, illetve speciális (szimmetrikus vagy páros) polinomokra és rombusz tartományra [18] jött ki a cn-es oszcilláció. Általánosan pedig 2002-ben Levenberg és Poletszkíj bizonyítottak egy becslést [34, Theorem 3.2], ami ugyan az intervallum esetét is lefedte, így azonban nem is mondhatott többet $c\sqrt{n}$-nél.

6. Tétel (Levenberg-Poletsky). *Ha $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, konvex síkhalmaz és $d := \operatorname{diam} K$ a K átmérője, akkor $p \in \mathcal{P}_n(K)$ esetén*

$$\|p'\| \geq \frac{\sqrt{n}}{20\operatorname{diam}(K)}\|p\| . \tag{4}$$

A [34] cikkben meg is jegyzik, hogy pusztán az átmérő ismeretében abszolút konstans szorzótól eltekintve ennél jobb nem is mondható: és a megfogalmazásukból úgy látszik, azt is sejtették, hogy ez lesz az általános nagyságrend. Mindenesetre munkájuk volt az első olyan eredmény, amely *minden* síkbeli konvex halmazra megadott egy általánosan érvényes becslést.

I.2. Pozitív definit függvényekre vonatkozó Turán féle extremális probléma. Az irodalomban Sztecskin [44] nyomán elterjedt elnevezés szerint a Turán féle extremális probléma nevet viseli a mai általánosabb formában az alábbiak szerint megfogalmazható kérdés.

7. Probléma. Legyen Ω egy nyílt, 0-ra szimmetrikus halmaz. Jelölje $\mathcal{F}(\Omega)$ azon folytonos függvényeket, amelyeknek a tartója $\operatorname{supp} f \Subset \Omega$ és amelyek pozitív definitek. Mekkora lehet $\int_\Omega f/f(0)$?

8. Definíció. Az Ω halmaz *Turán-kostansa* $\mathcal{T}(\Omega) := \sup_{f\in\mathcal{F}(\Omega)} \int_\Omega f/f(0)$.

A problémában a függvényosztályt $(C(\Omega), L^1(\Omega))$ illetve a tartóra vonatkozó feltevést (pl. csak $\operatorname{supp} f \subset \Omega$) változtatva más verziókat kapunk, melyek között több ekvivalencia is fennáll: ezt a lokálisan kompakt Abel csoportok általánosságában a [57] cikkben tisztáztuk.

Sztecskin [44] egy 1970-es beszélgetésükben Turán által neki feltett kérdésre hivatkozik, és megmutatja, hogy ha $h = 1/n$ alakú, és $\Omega = [-h, h] \subset \mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, akkor a körön ("1 dimenziós tóruszon") a $\Delta(x) := (1-|x|/h)_+$ háromszögfüggvény az extremális, és így $\mathcal{T}_\mathbb{T}([-h, h]) = h$. Jegyezzük meg itt, hogy a Δ függvény természetesen merül fel, mint potenciális extremális függvény, mivel konstans szorzótól eltekintve ez a fél-intervallum karakterisztikus függvényének a konvolúció-négyzete, és ez a konvolúciós előállítás mutatja, hogy szükségképpen pozitív definit.

Ebből az eredményből könnyen adódik, hogy tetszőleges h-ra is $\mathcal{T}_\mathbb{T}([-h, h]) = h + O(h^2)$, és a valós egyenesen $\mathcal{T}_\mathbb{R}([-h, h]) = h$ minden valós h-ra. Az azonban elkerülte Sztecskin figyelmét, hogy ezt már Boas és Kac harminc évvel korábban is megmutatták [11].

Később Sztecskin tanítványai felkapták a problémát, és számos munka foglalkozott a kérdéssel. Aresztov és Berdysheva [4] a kérdés többváltozós változatát kezdte vizsgálni $\mathbb{R}^d$-ben, és megmutatták, hogy pl. a szabályos hatszög is úgy viselkedik, mint az intervallum: a felére kicsinyített tartomány karakterisztikus függvényének a konvolúciónégyzete az extremális értéket szolgáltatja. Az ilyen, a problémára nézve "reguláris" tartományokat akár el is nevezhetjük mondjuk "Sztecskin-Turán féle tartományoknak" (V. V. Aresztov által javasolt elnevezés). Abból a fenti észrevételből, hogy $\chi_{\frac{1}{2}\Omega} * \chi_{\frac{1}{2}\Omega} \in \mathcal{F}(\Omega)$, következik, hogy minden $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ szimmetrikus konvex tartományra $\mathcal{T}(\Omega) \geq |\Omega|/2^d$, és így tehát egyenlőség esetén mondjuk, hogy a tartomány Sztecskin-Turán típusú, határozott $>$ fennállása esetén pedig, hogy *nem-Sztecskin-Turán* típusú.

2001-ben Gorbacsev [25] megmutatta, hogy a gömb is Sztecskin-Turán típusú. Később azonban az irodalomban megtaláltam ugyanezt az eredményt Siegelnél is, [43], 1935-ből, bár a korábbi szerzőknek sem lett volna könnyű ezt megtalálniuk, mert a cikk címe, témája semmiben nem utal egy ilyen analítikus kérdés vizsgálatára. Siegel a Minkowski rácspont tételt vizsgálta, rájött, hogy ha a

B gömb esetében a triviális $|B|/2^d$ alsó becslés élesíthető volna, az javítaná a tételt, majd megoldotta az extremális problémát és leszűrte a tanulságot, miszerint ilyen úton a Minkowski rácspont tétel mégsem javítható. De, mondja Siegel, az extremális probléma önmagában érdekes, ezért ő mégiscsak szépen kidolgozza azt, és alkalmazza is az egész függvények elméletében.

Ha már itt tartunk, akkor meg kell említeni, hogy a probléma sok változata és rokona ismert. Nem csak az integrált, de mondjuk a négyzet-integrált is lehet maximalizálni azonos feltételek mellett: ezt a verziót amerikai szerzők kutatták szintén már Sztecskin és Turán előtt [24, 17, 39]. Még természetesebb a Sztecskin iskola által *pontonkénti Turán probléma* [6] névre keresztelt verzió, amelyben adott $z \in \Omega$ pontbeli függvényérték maximumát keressük, és amelyet, úgy látszik, először Boas és Kac vizsgáltak [11] cikkükben, mégpedig nem is csak $\mathbb{R}$-en, de már $\mathbb{R}^d$-ben is. De amint az általánosság további fokára lépünk, és általában pl. lokálisan kompakt Abel csoportokról beszélünk, kiderül, hogy más felállásban – pl. a $\mathbb{Z}$ csoporton – felírva ezt a kérdést, Carathéodory [13] és Fejér [22] klasszikus, évszázados extremális feladatához jutunk.

Ismertessük tehát ezeket a klasszikus eredményeket pontosan is.

9. Tétel (Carathéodory-Fejér). *Tegyük fel, hogy* $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$ *nemnegatív trigonometrikus polinom. Ekkor* $a_1 \leq \cos \frac{\pi}{n+2}$*, és ez pontos is.*

Jegyezzük meg, hogy ha a $\mathbb{Z}$ csoporton $\phi := \widehat{f}$-ra írjuk fel a kérdést, akkor ez egy pontonkénti Turán problémává válik: $\Omega = [-n, n] \subset \mathbb{Z}$ a ϕ előírt tartója, ϕ pozitív definit (mert a Fourier-transzformáltja nemnegatív), $\phi(0) = 1$, és $\phi(1)$-et maximalizáljuk.

Nézzük most Boas és Kac munkáját! Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ egy 0-ra szimmetrikus konvex test. Egy $x \in \mathbb{R}^d$ vektorra legyen $||x||$ az Ω által definiált normája x-nek, azaz

$$||x|| := \inf \left\{ \lambda > 0 : \ \frac{1}{\lambda} x \in \Omega \right\}.$$

Más szóval, Ω a $||\cdot||$ norma egységgömbje. Ekkor a (7) és (8) jelölésekkel fennáll

10. Tétel (Boas-Kac). *Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *egy konvex, nyílt,* 0*-ra szimmetrikus tartomány. Tegyük fel, hogy*

$$\frac{1}{n+1} \leq ||z|| < \frac{1}{n}, \tag{5}$$

valamely $n \geq 1$ *mellett. Akkor*

$$\mathcal{M}(\Omega, z) = \cos \frac{\pi}{n+2}.$$

Ugyanaz az extremális érték, mint a Carathéodory-Fejér problémában. Amit Boas és Kac fel is használtak cikkükben a saját kérdésük megválaszolásához ... S mint később kiderül, nem is véletlenül "jött be" ez nekik a képbe.

A fentiek fényében tehát immár nem látszik kellően megalapozottnak a problémát Turán és Sztecskin nevével jelölni, de annál nehezebb volna egyértelműen megmondani, kinek is kellene itt a probléma felvetését tulajdonítani, és az irodalomban oly elterjedt gyakorlaton változtatni sem volna egyszerű. Az értekezésben mindenesetre megmaradtunk az elterjedt elnevezésnél, felhívva a figyelmet a fentiekben vázolt körülményekre is.

Visszatérve az előzményekre, a mi munkánk egyik kiindulópontja Aresztov és Berdysheva következő tétele [5] volt.

11. Tétel (Aresztov-Berdysheva). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ egy szimmetrikus konvex és rácsszerűen parkettázó halmaz, azaz létezzen olyan $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ rács, amelyre* 0*-mértékű halmaztól eltekintve a $\{\lambda + \Omega \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ eltoltak a tér diszjunkt fedését, azaz parkettázását képezik. Ekkor $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}(\Omega) = |\Omega|/2^d$.*

Lényegében ez az egyetlen olyan előzmény, amely az eredeti (integrálos) problémában halmazok egy nagyobb osztályára vonatkozóan adott eredményt. Ugyanakkor nem-Sztecskin-Turán típusú (konvex, szimmetrikus) halmazok egyáltalán nem ismertek – mármint euklideszi térben nem, mert a tóruszon már egy dimenzióban is ismeretes egy ideje (Oroszországban Yu. Popov szóbeli közlése, Magyarországon Halász Gábor egyetemi előadásai nyomán), hogy ha h *nem* $1/n$ alakú, akkor $\mathcal{T}_{\mathbb{T}}([-h,h]) > h$. Vegyük észre, hogy Sztecskin tétele – ami azonban lehet, hogy korábban is ismeretes volt, ld. a disszertáció 2.1.2. szakaszában leírt gondolatmenetet, ami legalábbis Montgomerynél [38] szerepel, de jóval korábban közismert volt – ennek az Aresztov-Berdysheva tételnek *lényegében* a speciális esete.

Ezt azért nem olyan könnyű észrevenni, mert valójában Sztecskinnél $\Omega = [-1/n, 1/n]$ *ténylegesen nem is parkettáz*, legalábbis páratlan n-re nem, hiszen a $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kör hossza, mértéke csak 1, és $|\Omega| = 2/n$. Viszont valójában nem is erre van szükség, hanem arra, hogy $\frac{1}{2}\Omega$ parketázzon! És ez teljesül, sőt pontosan akkor teljesül $\mathbb{T}$-n, ha $\Omega = [-1/n, 1/n]$ alakú. Tehát azt találtuk, hogy a körön Aresztov és Berdysheva tétele érvényes, mi több, meg is fordítható: egy szimmetrikus, konvex $\Omega \subset \mathbb{T}$ halmaz *pontosan akkor Sztecskin-Turán típusú* a körön, ha $\frac{1}{2}\Omega$ parkettázza $\mathbb{T}$-t.

Persze 1 dimenzióban a konvex geometria nagyon egyszerű: csak intervallumok vannak. Két dimenziótól kezdve már sokkal többfélék a szimmetrikus konvex halmazok is, és nem várható ilyen megfordítás: hiszen pl. a gömb biztosan nem parkettáz, mégis Sztecskin-Turán típusú.

A disszertációban is ismertetett különböző részeredmények után orosz szerzők nemrégiben a végére jártak a $\mathcal{T}([-h,h])$ értékének: előbb *bizonyos* [35, 27, 28], majd *minden racionális* h-ra [26, 33], végül *tetszőleges* h-ra [32] is meghatározták az extremális konstansot. Ugyanakkor még $\mathbb{T}$-n vagy akár $\mathbb{R}$-en sem volt ismeretes semmilyen eredmény a nem csak egyetlen intervallumból álló, hanem valamelyest "szétszórt", nem konvex halmazok extremális értékére vonatkozóan.

A disszertáció 2.9 Fejezetében foglalkozunk a pontonkénti Turán problémával, ami, mint mondottuk, konvex halmazokra valójában $\mathbb{R}$-en, $\mathbb{R}^d$-n Boas és Kac [11], de $\mathbb{Z}$-n Carathéodory [13] és Fejér [22] problémája. (Az, hogy egyáltalán nem erőltetett itt a különböző csoportokon való analóg kérdések összevetése, egységes kezelése, az később nagyon meggyőzően meg is mutatkozik majd!) Jelöljük ebben a szakaszban

$$\mathcal{F}^*(\Omega) := \{f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R} \ : \ \operatorname{supp} f \subseteq \Omega, f(0)=1, f \,\text{pozitiv definit}\}, \tag{6}$$

és analóg módon, amikor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}(\Omega) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \ : \ \operatorname{supp} f \subseteq \Omega, f(0)=1, f \,\text{pozitiv definit}\}. \tag{7}$$

Írjuk fel a problémát formulával:

12. Probléma (Boas-Kac - típusú pontonkénti extremális probléma). Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ egy nyílt halmaz, és legyen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ pozitív definit függvény, $\operatorname{supp} f \subseteq \Omega$ és $f(0)=1$. Legyen emellett $z \in \Omega$. Mi a lehetséges legnagyobb értéke $f(z)$-nek? Azaz határozzuk meg az

$$\mathcal{M}(\Omega, z) := \sup_{f \in \mathcal{F}(\Omega)} f(z). \tag{8}$$

mennyiséget.

13. Megjegyzés. Nyilván, $\mathcal{M}(\Omega, z) \leq 1$, mivel

$$1 \pm f(z) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 \pm \exp(2\pi i \langle z, t\rangle))\widehat{f}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^d} (1 \pm \cos(2\pi \langle z, t\rangle))\widehat{f}(t)dt \geq 0.$$

14. Probléma (Turán típusú pontonkénti extremális probléma a tóruszon). Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{T}^d$ tetszőleges nyílt halmaz, és $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ egy pozitív definit függvény, amelyre $\operatorname{supp} f \subseteq \Omega$ és $f(0)=1$. Legyen továbbá $z \in \Omega$ adott, rögzített pont. Mi a lehetséges legnagyobb értéke $f(z)$-nek? Azaz határozzuk meg az

$$\mathcal{M}^*(\Omega, z) := \sup_{f \in \mathcal{F}^*(\Omega)} f(z) \tag{9}$$

mennyiséget.

15. Megjegyzés. Legyen $\Omega \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ és $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Az f függvényre ahhoz, hogy pozitív definit legyen *a tóruszon*, annak kell teljesülnie, hogy a Fourier transzformált:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \langle \xi \ ; \ x \rangle} f(x) \, dx$$

legyen nemnegatív de csak ξ értékek egy diszkrét halmazán, nevezetesen $\xi \in \mathbb{Z}^d$-re, míg f pozitív definitsége $\mathbb{R}^d$-n azzal ekvivalens, hogy az $\widehat{f}$ Fourier transzformált nemnegatív minden értéken. Ebből nyilvánvalóan mindig fennáll

$$\mathcal{M}^*(\Omega, z) \geq \mathcal{M}(\Omega, z). \tag{10}$$

Fejér és Carathédory problémáját általánosítva, kérdezhető tetszőleges $H \subset \mathbb{N}_2$-re (ahol $\mathbb{N}_2 := \mathbb{N} \cap [2, \infty)$) a következő is. Legyen

$$\begin{aligned} \Phi(H) := \{ \varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+ \ : \lambda \in \mathbb{R}, \ \varphi \geq 0, \\ \varphi(t) \sim 1 + \lambda \cos 2\pi t + \sum_{k \in H} c_k \cos 2\pi k t \} \end{aligned} \tag{11}$$

illetve $m \in \mathbb{N}_2$ és $H \subseteq \mathbb{N}_2$ mellett

$$\begin{aligned} \Phi_m(H) := \{ \varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R} \ : \lambda \in \mathbb{R}, \ \varphi(\frac{j}{m}) \geq 0 \, (j \in \mathbb{Z}), \\ \varphi(t) \sim 1 + \lambda \cos 2\pi t + \sum_{k \in H} c_k \cos 2\pi k t \}. \end{aligned} \tag{12}$$

16. Probléma (Carathéodory-Fejér típusú trigonometrikus polinomiális extremális probléma). Meghatározandó a

$$M(H) := \sup \{ \lambda = 2 \widehat{\varphi}(1) \ : \ \varphi \in \Phi(H) \}. \tag{13}$$

extremális mennyiség.

17. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy $M(H) \leq 2$ mindig, mivel

$$|\lambda/2| = |\widehat{\varphi}(1)| \leq \|\varphi\|_1 = \int \varphi = \widehat{\varphi}(0) = 1.$$

18. Probléma (Diszkretizált Carathéodory-Fejér típusú extremális probléma). Meghatározandó

$$M_m(H) := \sup\{\lambda = 2\widehat{\varphi}(1) \ : \ \varphi \in \Phi_m(H)\}. \tag{14}$$

19. Megjegyzés. Nyilvánvalóan $\Phi(H) \subseteq \Phi_m(H)$, ezért $M(H) \leq M_m(H)$ mindig fennáll.

I.3. Idempotens trigonometrikus polinomok koncentrációja. Jelölje, mint szokásos, $e(t) := e^{2\pi i t}$, továbbá $e_h(t) := e(ht)$. Nyilvánvalóan a konvolúcióra nézve fennálló tulajdonságuk miatt a

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{h\in H} e_h \ : \ H \subset \mathbb{N}, \ \#H < \infty \right\} \tag{15}$$

halmazba tartozó trigonometrikus polinomokat *idempotens exponenciális (vagy trigonometrikus) polinomoknak*, vagy röviden csak *idempotenseknek* nevezzük. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy itt és a későbbiekben is általában $H \subset \mathbb{N}$ spektrumot tekintünk, ami azért nem megy az általánosság rovására, mert egy e_h függvénnyel való beszorzás a spektrumot h-val eltolja, miközben az idempotens (vagy általában, tetszőleges trigonometrikus polinom) abszolút értékét nem változtatja meg. Mivel problémáinkban a polinomok abszolút értékére vonatkozó állításokat vizsgálunk, külön jelzés nélkül élünk ezzel a lehetőséggel. Ennek megfelelően a trigonometrikus (Taylor-) polinomokat is eltolt spektrummal tekintjük, azaz azt a jelölést használjuk, hogy

$$\mathcal{T} := \left\{ \sum_{h\in H} a_h e_h \ : \ H \subset \mathbb{N}, \ \#H < \infty\,; \ a_h \in \mathbb{C}, \ h \in H \ \right\}. \tag{16}$$

Egy $E \subset \mathbb{T}$ halmaz *szimmetrikus*, ha $x \in E$ esetén $-x \in E$; más szóval $-E = E$.

20. Definíció. Legyen $p > 0$ és $a \in \mathbb{T}$. Azt mondjuk, hogy p-koncentráció áll fenn a-ban, ha létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy bármilyen szimmetrkus nyílt $E \subset \mathbb{T}$ halmazra, amelyre $a \in E$, található olyan $f \in \mathcal{P}$ idempotens, hogy

$$\int_E |f|^p \geq c \int_{\mathbb{T}} |f|^p. \tag{17}$$

Továbbá, az összes ilyen c konstans supremumát $c_p(a)$-val jelöljük: ezt nevezzük a *p-koncentráció szintjének az a-ban.* Egy (17)-nek eleget tévő f-et *a-ban p-koncentrálódó (idempotens) polinomnak* nevezünk.

21. Definíció. Legyen $p > 0$. Azt mondjuk, hogy p-koncentráció áll fenn, ha létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy bármilyen szimmetrikus nyílt $E \subset \mathbb{T}$ halmazra található olyan $f \in \mathcal{P}$ idempotens, hogy

$$\int_E |f|^p \geq c \int_{\mathbb{T}} |f|^p. \tag{18}$$

Továbbá, az összes ilyen c konstans supremumát c_p-vel jelöljük és ezt nevezzük a *p-koncentráció szintjének*. Egy (18)-nak eleget tévő f-et *p-koncentrálódó (idempotens) polinomnak* nevezünk.

Nyilvánvalóan, amint [15] is megjegyzi, a $c_p(a)$ lokális konstans a-ban felülről félig folytonos fügvény a $\mathbb{T}$-n, és $c_p = \inf_{a\in\mathbb{T}} c_p(a)$.

22. Megjegyzés. Szimmetrikus E halmazokat tekintünk, mert $f \in \mathcal{P}$ sőt $f \in \mathcal{T}$ esetén $|f|$ páros függvény. A szimmetria nélkül tehát a $c_p(a)$ konstans általános $a \in \mathbb{T}$-re legfeljebb $1/2$ lehetne, míg számunkra természetesebb volt a maximális koncentráció esetének azt venni, ha a koncentráció szintje 1. Mindazonáltal visszatérni a nem szimmetrikus halmazokra csak annyi változást jelentene, hogy $a \neq 0, 1/2$ esetén $c_p(a)$ értékét, és hasonlóan c_p értékét is, meg kellene szorozni $1/2$-del.

23. Definíció. Legyen $p > 0$ és $a \in \mathbb{T}$. Azt mondjuk, hogy a-ban p-koncentráció áll fenn *mérhető halmazokra*, ha létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy bármilyen szimmetrikus, mérhető és pozitív mértékű $E \subset \mathbb{T}$ halmazra, amelyre a E-nek sűrűségi pontja, található olyan $f \in \mathcal{P}$ idempotens, hogy

$$\int_E |f|^p \geq \gamma \int_{\mathbb{T}} |f|^p. \tag{19}$$

Az összes ilyen γ konstansok supremumát $\gamma_p(a)$-val jelöljük.

Továbbá azt mondjuk, hogy p-koncentráció van *mérhető halmazokra*, ha egy ilyen egyenlőtlenség fennáll tetszőleges szimmetrikus, mérhető és pozitív mértékű E halmazra. Az ennek eleget tevő konstansok supremumát γ_p-vel jelöljük.

Nyilván a mérhető halmazokra vonatkozó koncentráció maga után vonja a (nyílt halmazokra vonatkozó) koncentrációt, de az nem ismeretes, hogy ezek mindig egyező mértékben valósulnak-e meg. (Amely p-re már ismert, ott igen.)

Az sem ismert, hogy esetleg $\gamma_p(a)$ is felülről félig folytonos volna-e? Erre semmilyen nyilvánvaló strukturális ok nem nagyon látszik, de ha mégis így volna, akkor a mi módszereinkből le lehetne vezetni, hogy $c_p = \gamma_p$. (Elképzelhető azonban elvileg az is, hogy majd csak ezután az eredmény *után*, következményként fogjuk egyszer úgy találni, hogy az alulról félig folytonosság teljesül.)

A p-koncentráció kérdését és c_p kiszámítását Cowling [14], és Ash [7] munkái vetették fel. Az ő eredeti témájuk konvolúció operátorok megszorított gyenge és erős típusának összehasonlítása volt (egy gyenge (2,2) típusú operátor szükségképpen erős (2,2) típusú-e?) A kérdést részletesen ld. a [8] áttekintő cikkben. Azóta a problémával Pichorides, Montgomery, Kahane és Ash, Jones és Saffari [1, 2, 3] is foglalkoztak, egyre jobb becsléseket érve el. 1983-ban Déchamps-Gondim, Piquard-Lust és Queffélec [15, 16] megválaszolták az [1]-ben felvetett kérdést, bebizonyítva, hogy L^2-re nézve a pontos érték

$$c_2 = \sup_{0 \le x} \frac{2\sin^2 x}{\pi x} = 0.46\cdots . \tag{20}$$

Továbbá ugyanott azt is megmutatták, hogy $c_p \ge 2^{1-\frac{p}{2}} c_2^{p/2}$ $p > 2$ esetén.

Az öt szerző közös munkájával készült [3] dolgozat fő eredménye a következőképpen mondható ki.

24. Tétel (Anderson, Ash, Jones, Rider, Saffari). *A mérhető halmazokra vonatkozó p-koncentráció fennáll minden $p > 1$ esetén.*

Más szóval megmutatták, hogy $\gamma_p > 0$ ha $1 < p < \infty$; a konstans értékére nézve a becsléseik 0-hoz tartanak, ha $p \to 1$ vagy $p \to \infty$. Azt is megmutatták, hogy $\gamma_2 = c_2$ a (20) szerinti értékkel. [2, 3] gondolatmenete a

$$D_n(x)D_n(qx) \tag{21}$$

szorzat függvény tulajdonságaival dolgozik, ahol D_n a Dirichlet magot jelöli, mégpedig – a frekvenciák eltolásáról fentebb mondottak szerint a

$$D_n(x) := \sum_{\nu=0}^{n-1} e(\nu x) = e^{\pi i(n-1)x} \frac{\sin(\pi n x)}{\sin(\pi x)}, \tag{22}$$

a megszokotthoz képest eltolt formában, ld. [3]. Ez a szorzat arra alkalmas, hogy a kérdést a $\mathbb{T}$ körről átvigye a diszkrét $\mathbb{G}_q := (\frac{1}{q}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ rácsra. Mivel pedig a Dirichlet mag megfelelő lineáris helyettesítés után a diszkrét esetben koncentrációt mutat tetszőleges k/q pontban – konkrétan a $D_n(\ell x)$, ahol $\ell k \equiv 1 \mod q$ – minden $p > 1$-re de $p = 1$-re már nem, ebből és más heurisztikus meggondolásokból és számításokból a szerzők a következő sejtésre jutottak.

25. Sejtés (Anderson, Ash, Jones, Rider, Saffari, [3]). $c_1 = 0$.

II. Az elvégzett vizsgálatok leírása, feldolgozás módszerei, források feltárása és felhasználása

II.1. Vizsgálatok, módszerek. A disszertáció 1. Fejezetében a komplex sík geometriájának a megértésén, pontos analitikus kezelésén múlik az elért eredmények élessége. Itt a klasszikusan már ismert analitikus módszereket (pl. a Turán féle vagy a Csebisev-lemmán keresztül) úgy kellett számításainkban nyomon követni, hogy a számítások eredménye a lehető legpontosabb eredményt adja. Az, hogy a geometriát használni kell, nem új: Erőd János már nagyon jó gondolatokkal megkezdte ezt az irányt, pl. jól felismerte a görbület szerepét, kihasználhatóságát a kérdésben [20]. De nem minden konvex test határgörbéjének pozitív a görbülete: erre az esetre is meg kellett találni azt az optimális halmazt, amelyre alkalmazva a Csebisev-lemmát, nagyságrendi veszteség nélküli pontos eredményt kaphatunk. Itt a maximum-pontban meghúzott normális irányú egyenesen számolva is már megjavítottuk a korábban ismert $\sqrt{n}$-es eredményt $n^{2/3}$-ra; de végül a normálisnak egy kis elfordítása (Halász Gábor észrevétele) adta meg a helyes n-es nagyságrend elérését.

A fejezet másik lényeges eredménye annak tisztázása, hogy a görbületet milyen mértékben lehet kihasználni. Itt Blaschke guruló kör tételének egy messzemenő élesítését tudtuk bevetni: Strantzen tétele [12] arról szól, hogy elegendő, ha a görbület majdnem minden határgörbe-pontban adott $\kappa_0 > 0$ felett marad. Ezt a korántsem triviális 1989-es geometriai tételt nem csak felhasználtuk, de be is bizonyítottuk, mégpedig egy új, bizonyos értelemben sokkal többet mondó úton. Módszerünk a "kör sokszögesítése": a Blaschke tétel diszkrét változatát bizonyítottuk be úgy, hogy a folytonos görbület helyett csak azt tesszük fel, hogy a határgörbe-pontbeli külső normális egységvektorok a görbén valamely fix $\tau > 0$ hosszú út megtétele után mindig legalább (legfeljebb) valamely adott ϕ szöggel fordulnak el. Ekkor a beírt illetve köréírt kör helyett lényegében szabályos n-szögeket kaptunk. Ez pontosan azért nem megy: kicsit csonkolni vagy megnagyobbítani is kellett az n-szögeket – minden esetre a $\tau \to 0$ esetben, ha a határgörbének legalább (legfeljebb) fix κ_0 görbülete van, megkapjuk a sokszögek limeszeként Blaschke $R = 1/\kappa_0$ sugarú köreit. És ezt megkapjuk a köréírt esetben a Strantzen féle erősebb verzióban, a csak majdnem minden pontra feltett görbületi feltevés mellett is!

A 2. Fejezetben is szerepet játszik a geometria, pontosabban olyan geometriai jellegű tulajdonságok, mint a pakolás, parkettázás, Fourier-analitikus leírása, kezelése. Ezeket jórészt az irodalomból vettük (beleértve társszerzőm, Kolountzakis korábbi eredményeit). De itt talán fontosabb az *általánosítás*: a korábban ismert lényegében egyetlen olyan tételt – Aresztov és Berdysheva tételét [5] – amely az euklideszi térben konvex halmazok egy osztályára is megadja az extremális értéket, mi több irányban is messzemenően általánosítottuk, észrevéve, melyek azok az analitikus, strukturális tulajdonságok, amelyek az eredményhez elegendőek.

Az egyik ilyen út a spektralitás felhasználása. A másik észrevétel az, hogy nem feltétlenül szükséges a konvexitás, ehelyett az Ω alaphalmaznak a $H-H$ differenciaként való előállítása is megteszi. A parkettázásnál pedig az eltolási rács, vagy általánosabban, eltolás-halmaz *egyenletes aszimptotikus felső sűrűsége* méri a parkettázás méretét: és ezen keresztül akkor is lehet becslést adni, ha parkettázás nincs is, csak pakolás. Ha van sűrűség ...

A Turán kostansnak a pakolásra vonatkozó feltevés melletti becslését tehát akkor tudtuk elvégezni, ha a Λ eltolás-halmaznak az (egyenletes aszimptotikus felső) sűrűsége egy pozitív $\rho > 0$ érték volt: ekkor a becsléseink $\mathcal{T}(\Omega) \leq 1/\rho$ típusúak voltak. Felmerült a kérdés, hol, milyen általánosságban lehet ezt a fajta sűrűséget megragadni? A 2. Fejezet legáltalánosabb eredményéhez azon az úton jutottunk, hogy egy, mind a problémában jelenlévő Fourier-analízis (pl.: pozitív definitség, stb.), mind a tárgyalt strukturális tulajdonságok szempontjából természetes és eléggé messzemenő általánosságba, a lokálisan kompakt Abel-csoportokra (LCA csoportokra) terjesztettük ki a fenti sűrűség-fogalmat.

A kiterjesztés nem triviális, hiszen – most a sorozatok, diszkrét halmazok számosság-mérték szerinti sűrűségére szorítkozva – a klasszikus definíció így néz ki:

$$\overline{D}^{\#}_{K}(A) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \#(\Lambda \cap (rK+x))}{|rK|} , \tag{23}$$

ahol K mondjuk az egységgömb, vagy az egységkocka. Mármost egy G LCA csoporton nincsenek ilyen univerzális halmazok, amelyeknek nagyításával lefedhető a tér (ha a tér nem metrizálható, mint általános esetben, akkor ugye gömb sincsen); nincsen dilatáció, nagyítás sem, legfeljebb meg lehet próbálni ezt a $K+K+K$ stb. összegekkel pótolni, de akkor sem tudunk kijönni a $\langle K\rangle$ részcsoportból, ami tipikusan nem adja ki a teljes G-t; szóval a definíció majd minden fogalma használhatatlannak tűnik ebben az általánosságban.

Itt nyomravezetőnk egy ismert lemma volt, ami valamiképpen azt ragadja meg, hogy egy V Borel-halmaz elég nagy. Egy LCA csoportban az igaz, hogy tetszőleges $C \Subset G$ kompakt halmazhoz és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan kompakt lezárású V Borel-halmaz, hogy a μ Haar-mértékkel $\mu(V+C) < (1+\varepsilon)\mu(V)$.

A $\lim_{r\to\infty} rK$ helyett tehát nem $r \to \infty$-nel, hanem tetszőleges $C \Subset G$-vel fogjuk "mérni" azt, hogy a keresett V halmazunk elég nagy legyen: azt pedig, hogy $\mu(V + C) < (1 + \varepsilon)\mu(V)$ legyen, úgy "építjük be" a definícióba, hogy a nevezőben az $|rK|$-nak megfelelő $\mu(V)$ helyett eleve $\mu(C + V)$-t írunk, ami akkor, ha V nem elég nagy, a C jelenléte miatt úgyis sokkal nagyobb lesz, mint lennie kéne. No és ha egyszer V amúgy is tetszőleges Borel halmaz, akkor persze a saját eltoltjai is ugyanolyan jók – már ameddig eltolás-invariáns μ mértékkel dolgozunk –, tehát nincs szükség az $rK + x$-ben szereplő eltolásra sem ... Így konstruálható meg a következő sűrűség-definíció:

$$\overline{D}^{\#}(\Lambda) := \inf_{C \Subset G} \sup_{V \in \mathcal{B}_0} \frac{\#(\Lambda \cap V)}{\mu(C + V)} . \tag{24}$$

Lehet, hogy ez meglepő – és meglepően egyszerűen van felírva – de jól működik, a klasszikus esetben visszaadja a szokásos sűrűséget, rendelkezik a szokásos tulajdonságokkal, és egészen jól kezelhető.

A 3. Fejezet módszerei kifejezetten megmaradnak a klasszikus Fourier-analízis körében – azon belül viszont elég sok mindent használnak. A kulcs gondolat [3] konstrukciójának kiterjesztése: a (21) formulában használjunk $D_n(qx)$ helyett egy 0-ban D_n-hez hasonlóan koncentrálódó, de nagyon hézagos T polinomot, és akkor a T spektrumában lévő nagy hézagok még azt is megengedik, hogy eléje $D_n(x)$ helyett egy egész sor D_n-et összeszorozzunk, azért úgy, hogy idempotens is maradjon a szorzat, és a $\mathbb{G}_q$ rácson mégis $D_n(k/q)$ helyett ennek valami nagyobb hatványa szerepeljen: azaz legyen a tekintett függvényünk

$$R(x) := D_r(x) \prod_{\ell=1}^{L-1} D_r((q^\ell + 1)x). \tag{25}$$

Mivel az $S(x) := R(x)T(qx)$ szorzatban most is a 0-ban koncentrálódó második tényező qx helyen felvett értéke szerepel, ez is olyan hatással lesz, mintha $\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} \delta_{j/q}$-val szoroznánk, azaz a $\mathbb{G}_q$ rácsra fogja visszavezetni a koncentrációs feladatot. Márpedig a $\mathbb{G}_q$ rácson az R-ben lévő szorzat éppen úgy viselkedik, mintha D_n^L-et tekintenénk. Ebből pedig máris világos, hogy ha mindez megy, akkor elég D_n-nek a rácson az Lp exponensre vett koncentrációja, és máris p-koncentrációt kaptunk: azaz az eddig tudott $p > 1$ helyett minden $p > 0$-ra lesz koncentráció.

Ez egy jó alapötlet, technikailag minden lépése kivitelezhető, csak egy baj van vele: nem világos, van-e a keresett, 0-ban koncentrálódó és tetszőlegesen nagy előírt hézagokkal rendelkező idempotens T polinom?

Minden esetre $p = 2$-re biztosan nincsen. Ugyanis ha f spektrumában a hézagok meghaladják N-et, akkor minden $1/N$-nél hosszabb I szakaszon az f négyzetintegrálja az L^2 normájának konstansszor az $|I|$-vel arányos részét fogja tartalmazni: a hézaggal fordítottan arányos hosszúságú szakaszokon az L^2 norma már egyenletesen "szétkenődik". Ez Wiener és pontosabb formában Ingham tétele. Tehát nem lehet a 0 körül a norma $(1-\varepsilon)$ része, ha a 0 körüli intervallum rövid.

Többeket megkérdeztem 2005-2006-ban arról, hogy hallott-e, olvasott-e i-lyesmit, tud-e választ arra, hogy ilyen idempotens polinom létezik vagy sem? Elsőre T. Tao is azt mondta: "Such animal does not exist!". Meggyőztem, hogy azért érdemes megvizsgálni a kérdést ... Tíz nap múlva pedig adott [45] egy valóban jó ötletet arra, hogyan is lehetne megkonstruálni egy ilyen hézagos, 0-ban koncentrálódó polinomot? Ötletének lényege, hogy olyan *kétváltozós* $f(x,y)$ idempotenst keressünk, amelynek az egyik változó szerinti integrálja, $F(x) := \int_{\mathbb{T}} |f(x,y)|^p dy$, mint a másik, x változó függvénye, a 0-ban, avagy annak tetszőlegesen előírt kis $(-\delta,\delta)$ környezetében, szigorú maximum hellyel bír. (Tao azzal nem foglalkozott, hogyan lehet ilyen f-et találni...) Ha ilyent találunk, akkor nagy N-re F^N már erősen koncentrálódni fog a $(-\delta,\delta)$-ban, ugyanakkor a kétváltozós f idempotensből alkalmas szintén nagy M-mel a $g(x) := g_{N,M}(x) := \prod_{k=1}^{N} f(x, M^k x)$ Riesz-szorzatot képezve, mind a hézagosság, mind az $\int_I |g|^p \approx \int_I f^N$ közelítés fenn fog állni, (mind $I = (-\delta,\delta)$, mind $I = \mathbb{T}$ mellett), azaz g alkalmasan nagy N-re és M-re szolgáltatja a megfelelő T-t.

Vegyük észre, hogy ez a konstrukció $p = 2$-re nem működhet: a Parseval formula miatt $\int_{\mathbb{T}} \left|\sum_{j=1}^{m} e(n_j x + m_j y)\right|^2 dy = \sum_{j=1}^{m} |e(n_j x)|^2 = m$, tehát konstans, függetlenül x-től. Mégis, a módszer keresztülvihető, ha $p \neq 2$ - csak éppen nem világos, milyen f polinommal? Hónapokig kerestünk, míg találtunk egy egész szép megoldást: $f(x,y) = 1 + e(y) + e(x+2y)$ marginális integrálja szigorúan monoton $[0,1/2]$-en, ha $p \neq 2$, és a monotonitás iránya csökkenő, ha $p > 2$, azaz akkor a 0-ban van szigorú maximum-hely. (A marginális integrál $f(-x,-y) = \overline{f(x,y)}$ miatt x-nek páros függvénye, ezért elegendő a $[0,1/2]$ szakaszt tekinteni.) De hát $p > 2$-re már [15], sőt utána minden $p > 1$-re [3] elintézte a koncentráció létezését, és az f polinomunk marginális integrálja $p < 2$-re éppenhogy minimumot vesz fel 0-ban, míg a maximuma $1/2$-ben van.

Sokáig nagy erővel kerestük a $p < 2$-re 0-ban koncentrálódó polinomot, mígnem rájöttünk, hogy ez igazán fölösleges: valójában sokkal jobban járunk azzal, ha a polinomunk marginális integrálja $1/2$-ben koncentrálódik! Nézzük, miért is?

A "Dirac delta" jellegű $D_n(x)$ illetve a 0-ban koncentrálódó $T(x)$ szerepe az, hogy a további $R(x)$ idempotens polinom $D_n(qx)$-szel ill. $T(qx)$-szel való beszorzása úgy viselkedjen, mintha a $\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\delta_{j/q}$ mértékkel szoroznánk, azaz a folytonos koncentráció kérdését a diszkrét $\mathbb{G}_q$ rácson vett koncentrációra "fordítsuk le". Itt – esetleg egy $x \to \ell x$ helyettesítést is felhasználva – lényegében azt kell nézzük, hogy a $\mathbb{G}_q$ rácson az $1/q$ helyen felvett függvényérték kiteheti-e a teljes függvény-érték pozitív százalékát, azaz a következőt tekintjük.

26. Definíció. Ha $q \in \mathbb{N}$, akkor jelölje

$$c_p^\sharp(q) := \sup_{R\in\mathcal{P}} \frac{\left|R\left(\frac{1}{q}\right)\right|^p}{\sum_{k=0}^{q-1}\left|R\left(\frac{k}{q}\right)\right|^p}, \tag{26}$$

és

$$c_p^\sharp := \liminf_{q\to\infty} c_p^\sharp(q). \tag{27}$$

Ha azonban olyan $T(x)$-ünk van, amely 1/2-ben koncentrálódik, akkor ugyanez a gondolatmenet a $T(qx) \approx \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\delta_{(2j+1)/(2q)}$ meggondoláson keresztül a következő, az eltolt $\mathbb{G}_q^\star := \mathbb{G}_q + \frac{1}{2q}$ rácson való koncentráció kérdésére vezet.

27. Definíció. Ha $q \in \mathbb{N}$, akkor jelölje

$$c_p^\star(q) := \sup_{R\in\mathcal{P}} \frac{\left|R\left(\frac{1}{2q}\right)\right|^p}{\sum_{k=0}^{q-1}\left|R\left(\frac{2k+1}{2q}\right)\right|^p} \tag{28}$$

és

$$c_p^\star := \liminf_{q\to\infty} c_p^\star(q). \tag{29}$$

Mármost vegyük észre, hogy (26)-ban a nevezőben ott van a kellemetlen $R(0)$: ugye ez minden pozitív definit függvényre majorálja a tetszőleges más pontbeli függvényértékeket, tehát $R(1/q)$ csak kisebb lehet, ráadásul a (25) típusú szorzatokkal, ha L-et nagynak vesszük – amire szükségünk lehet a többi, $R(1/q)$-nál kisebb fügvényértékek tetszőleges ε százaléknál kisebbé tétele, "lenyelése" érdekében – akkor persze $R(1/q)$ is kezd eltörpülni $R(0)$ mellett. Itt tehát egy finom egyensúlyozásra kényszerülünk, és az optimum semmiképpen sem lehet jobb, mint 1/3 (mivel $R(1/q)$ a számlálóban is és nevezőben is szerepel, az ugyankkora $R(-1/q)$ és a még nagyobb $R(0)$ pedig csak a nevezőben).

De az eltolt $\mathbb{G}_q^\star$ rácson ilyen akadályba nem ütközünk, ott egy, a (25)-höz hasonlóan szerkesztett

$$R(x) := D_r(x) \prod_{l=1}^{L-1} D_r\left(((2q)^l + 1)x\right)$$

szorzatban lehet $R(1/q)$ a maximális abszolút értékű tag, és a (28) hányados L jó nagynak választása mellett megközelítheti akár az 1/2-et is. Itt az E halmazra feltett szimmetrikusságnak és $|R|$ párosságának megfelelően a diszkrét koncentráció duplája felel meg a folytonos, $\mathbb{T}$-n vett koncentrációnak, tehát ez azt jelenti, hogy a 0-ban koncentrálódó D_n-nel vagy T-vel soha nem lehet elérni a maximális koncentrációt, de 1/2-ben koncentrálódó T-vel elvileg erre is lehetőség nyílik.

Ez tehát megfordította a keresés irányát: most már a $p < 2$ esettel lehettünk elégedettek és $p > 2$-re kerestünk 1/2-ben koncentrálódó T-t. Csakhogy itt aztán újabb akadályba ütközik az ember: a Hardy-Littlewood féle majoráns problémába. Ez is lényegében a Parseval formulán múlik, meg némi kombinatorikus számoláson, de minden esetre közismert, hogy ha $p \in 2\mathbb{N}$, akkor $|\widehat{g}| \leq \widehat{h}$ esetén $\int_{\mathbb{T}} |g|^p \leq \int_{\mathbb{T}} |h|^p$. Ha tehát, mint fentebb,

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{K} e(n_j x + m_j y), \tag{30}$$

ahol csak annyit kell feltegyünk, hogy $(0 <)m_1 < \cdots < m_K$, akkor az $x = 0$ helyen és az $x = 1/2$ helyen összehasonlítva az értékeket, azt kapjuk, hogy $g(y) := f(1/2, y)$ függvényt majorálja a $h(y) := f(0, y)$ függvény, azaz $F(1/2) \leq F(0)$, valahányszor $p \in 2\mathbb{N}$. Tehát $p \in 2\mathbb{N}$-re nem megy a szándékolt gondolatmenet, és kénytelenek vagyunk a 0-ban koncentrálódó T-vel dolgozni: ebből pedig maximális koncentrációt nem fogunk kihozni. (Később ki is derült, hogy nem is lehet, mert $c_{2k} \leq 1/2$, tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re.)

A $2 < p \neq 2\mathbb{N}$ eset még érdekesebb. Ilyen p-re van ellenpélda a Hardy-Littlewood majoráns kérdésben [10, 9], de a kérdésünk ennél "kicsit" tovább megy: nekünk idempotens ellenpélda kell. Ilyen mondjuk $p = 3$-ra Hardytól és Littlewoodtól [30] ismeretes volt: $1 + e(y) \pm e(3y)$, s ennek alapján Montgomery [38, p.144] felvetette, hogy kell lennie általában is, de erre a sejtésre munkánk idején még senki nem közölt megoldást. Gerd Mockenhaupt habilitációs tézisében szerepel ugyan az állítás, abban a formában, hogy $2k - 2 < p < 2k$-ra $1 + e(y) \pm e((k + 1)y)$ volna az ellenpélda, de a bizonyítás eleve csak $2 < p < 4$-re szorítkozik, és ott is egy olyan irodalmi hivatkozás felhasználásával, ami valami félreértés lehet, mert a jelzett helyen nem található az idézett erős egyenlőtlenség. Írtunk Mockenhauptnak, s kiderült, épp akkorra - jó tíz évvel a hibás korábbi okoskodás után! – W. Schlaggal közösen találtak megoldást a Montgomery sejtésre, ha nem is az eredetileg sejtett formában. Megoldásuk lényege, hogy nem három, hanem 4 tagú idempotens polinomot keresnek, de szorzat alakban, t.i. $(1+e_j)(1 \pm e_{j+1})$ alakban, ami jobban kezelhető számítási szempontból. Innen nekünk már "csak" kétváltozóra kellett átdolgozni a példát, és elő is állt a Riesz szorzatos konstrukcióhoz kívánt alappolinom, mint

$$f(x,y) := (1 + e_1(x)e_k(y))(1 + e_1(x)e_{k+1}(y)), \tag{31}$$

ahol $p/2 \neq \mathbb{N}$ és $k > p/2$ páratlan egész.

Ezzel a konstrukcióval tehát el lehet érni, hogy ha $p \neq 2\mathbb{N}$, akkor (nyílt halmazokra) akár maximális koncentrációt is bizonyítsunk: ha $p \in 2\mathbb{N}$, akkor a 0-ban koncentrálódó T-vel kell dolgoznunk, és ebben az esetben finom analitikus, aszimptotikus számításokkal néhány % pontossággal tudtuk megbecsülni c_{2k} értékét.

Nehezebb a mérhető halmazokra vonatkozó koncentráció kérdése. Itt előfordulhat, hogy egyetlen rácspont sem tartozik E-hez, tehát az sem magától értetődő, milyen racionális pontokat is tudunk használni a koncentrációhoz? Először is tehát inhomogén diofantoszi approximációval dolgozunk, hogy E-nek valamely alkalmas ξ sűrűségi pontjához viszonylag közel találjunk meg egy $(2k+1)/(2q)$ alakú rácspontot. Általában erre nagyjából $1/q^2$ nagyságrend biztosítható, tehát a rácspont körüli kis intervallumunknak, ahol E pontjait viszonylag sűrűn találjuk, szintén legalább $1/q^2$ nagyságúnak kell lennie. A folytonos-diszkrét átmenethez itt tehát már nem szorítkozhatunk tetszőlegesen kis δ sugarú környezetre, hanem meg van határozva a mozgásterünk. Ennek következtében uralnunk kell valahogyan, hogy az általános rácspontok ilyen környezetében az R idempotens polinomunk nagyjából a rácspontban felvett értéke körül maradjon: magyarán a fokszámot korlátozva és Bernstein- illetve Marczinkievicz-Zygmund egyenlőtlenségekkel dolgozva érhetünk el eredményt. Ehhez a (25) jellegű szorzatokban maximum két tényezőt engedhetünk meg: innen adódnak a mérhető halmazokra gyengébb eredmények. Hogy egyáltalán azokat elérhessük, a következő technikai lemma kidolgozására is szükségünk volt.

28. Állítás. *Legyen $p > 2$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz léteznek $\delta_0 > 0$ és $\eta > 0$ úgy, hogy minden $\delta < \delta_0$ és $N \in \mathbb{N}$ mellett, ha E mérhető halmaz és kielégíti az $|E \cap [-\delta, \delta]| > 2(1-\eta)\delta$ feltételt, akkor van olyan T idempotens amelynek* *hézagai nagyobbak, mint N és amelyre*

$$\int_{E\cap[-\delta,\delta]} |T|^p > (1-\varepsilon)\int_0^1 |T|^p.$$

Legyen $p>0$ úgy, hogy p nem páros egész. Ekkor tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz létezik $\delta_0>0$ és $\eta>0$ úgy, hogy minden $\delta<\delta_0$ és $N\in\mathbb{N}$ mellett, ha E egy olyan mérhető halmaz, amely kielégíti a $|E\cap[\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}+\delta]|>2(1-\eta)\delta$ feltételt, akkor létezik olyan T idempotens, amelynek hézagai nagyobbak, mint N, és amelyre

$$\int_{E\cap[\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}+\delta]} |T|^p > (1-\varepsilon)\int_0^1 |T|^p.$$

Hogy mégis fel tudunk menni maximális koncentrációra, az egy kétlépéses "kerülőúton" keresztül történik. Egyfelől, ha nem ragaszkodunk az idempotens polinomokhoz, hanem pozitív definit polinomokat tekintünk, akkor könnyebb dolgunk van: pl. D_r tetszőleges nagy hatványa pozitív definit, ha nem is idempotens többé. Itt tehát nem kell a fokszámot veszélyesen megnöveljük, mindössze Lq fokszámmal már nagy hatványhoz érkezhetünk (illetve levetíthetjük a rácson felvett értékek megőrzése mellett a polinomunkat a max. $2q$ fokú polinomok terére is: ez a lépés ismét nem feltétlenül őrzi meg az idempotens tulajdonságot, de a pozitív definit tulajdonságot igen.) Ezen az úton bizonyítható maximális koncentráció $p\neq 2\mathbb{N}$ kitevőkre a pozitív definit polinomok körében. A következő lépés a jól koncentrálódó pozitív definit polinomunk $0-1$ együtthatós megközelítése, szimulációja, ami $p>2$ esetén Salem és Zygmund nyomán sztenderd módszernek tekinthető (mi konkrétan Burkholder egy martingál egyenlőtlenségét is felhasználjuk, de ekvivalensen leírható volna a gondolatmenet "elemien" is.) Végül olyan $R(x)$-eket tekintünk, amelyek $Q(x)Q((2q+1)x)$ alakú szorzatok, és Q $2p$ kitevőre koncentrálódik jól: ezzel és Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséggel még egy $2p\to p$ redukciót is el tudunk végezni, azaz a fenti valószínűségi konstrukció eredményeit $p>1$-ig használni tudjuk. Ugyanezen oknál fogva, egyre gyengülő becslésekkel, de még a $p>1/2$ kitevőkre is pozitív koncentráció érhető el.

Ezzel elmondottuk, milyen módszerrel cáfolható meg a 25. Sejtés. Valójában most a fordítottja a kérdés: ha egyszer $c_1=1$, sőt $c_p=1$ minden $0<p<2$ mellett is, akkor igaz-e vajon ugyanez γ_p-re is? A fentiekben vázolt gondolatmenetet kissé megvariálva – Cauchy-Schwarz helyett Hölder egyenlőtlenség, $Q(x)Q((2q+1)x)$ helyett különböző kitevőkre jól koncentrálódó Q_1 és Q_2 segítségével felépített szorzat – γ_1 értékére egészen jó alsó becslést lehet kidolgozni, de az 1 érték azért ilyen úton nem érhető el.

Ugyanakkor felmerül a kérdés, hogy a diszkrét esetben, $\mathbb{Z}_q$-ban – amit segédeszközként felhasználtunk $\mathbb{T}$-re is – önmagában van-e (q-ban egyenletes) koncentráció pl. $p = 1$-re? A fenti módszerben "csaltunk", ami a rácsot illeti, hiszen ott megkülönbözhetetlen faktorokkal tulajdonképpen D_r egy nagy hatványát vettük: ez akkor, ha az egész terünk csak maga a $\mathbb{Z}_q$ rács, és továbbra is idempotenseket akarunk tekinteni, ki van zárva! És valóban, az derül ki, hogy a 25. Sejtés diszkrét esetre igazolható Green és Konjagin egy eredményének [29] felhasználásával. Ez egyszerre mutatja, hogy módszereink hogyan kerülték meg a várható korlátokat, és persze azt is, hogy Anderson et al. sejtése valahol nem volt teljesen megalapozatlan.

II.2. Források feltárása. Erről a kérdésről matematikus munkákban általában nem sok szót lehet ejteni, mert eléggé sztenderd gyakorlata van annak, ahogyan a jól ismert adatbázisokban az adott kérdés előzményei felderíthetőek. Esetünkben azonban volt néhány említésre méltó dolog.

Az 1. Fejezet témájában az irodalomban szinte teljesen megfeledkeztek Erőd János [20] dolgozatáról, pontosabban annak a tartalmasabb részéről, melyben a komplex sík tartományaira vizsgálta a fordított Markov típusú egyenlőtlenségek kérdését. Cikkét sokan idézték, de kizárólag az intervallum esetére vonatkozó konstans pontos kiszámításával kapcsolatban, így az olvasó – először én is – automatikusan úgy tekinthette, hogy ez a cikk ennyiről szól. Annál nagyobb meglepetéssel járt számomra, amikor végül elolvastam rendesen a cikket, s megtaláltam benne az eredmények és gondolatok egészen értékes tárházát! Úgy látszik, Erőd még nem tudott sem a Lebesgue-integrálról, sem Blaschke tételeiről, mégis nagyon komoly lépéseket tett afelé, hogy a komplex sík általános tartományaira is tisztázódjon a valós nagyságrend kérdése. Saját munkám sok szempontból az övének a folytatása volt, különösen a görbület szerepét vizsgáló [52] cikkben. Hogy a magyar nyelven, a háború árnyékában írott munkája mennyire nem avult el, azt az is mutatja, hogy – hála Boriszlav Bojanovnak! – 7 évtized után a cikk angol nyelvű teljes fordítása is megjelenhetett az East J. Approx. archív szekciójában [20].

Erőd Jánosnak ez az egyetlen matematikai munkája. Izgatott a kérdés, hogy miért nem írt többet, mivel foglalkozott, mi lett a személyes sorsa? Nem könnyen, és nem hétköznapi történetre bukkantam, ami persze inkább a matematika történet (és általában, borzalmas XX. századi történelmünk) területére vezet, ld. [54].

A 2. Fejezetben feldolgozott ún. Turán féle probléma is számos irodalmi meglepetéssel járt. Lényegében az derült ki, hogy a 70-es években Sztecskin után Turán problémának elnevezett kérdés minden verzióját, sokszor már általánosabb keretek között is, klasszikus szerzők jóval korábban felvetették, vizsgálták már. Itt [11], [24], és különösen [43] előzték meg Turánt és Sztecskint, lefedve több később újra felfedezett eredményt. Soha nem fölösleges az irodalom alaposabb felkutatása! Emellett rendkívül értékes többlet-információkat kaptam élőszóban is mind konkrét tényeket (pl. hogy $\mathcal{T}_{\mathbb{T}}((-h,h)) > h$, ha $h \neq 1/n$), mind a fellelhető irodalmi előzményeket tekintve. Ezek nélkül az útbaigazítások nélkül aligha jutok el az irodalom ilyen szintű feldolgozására.

Ugyanakkor itt is hasznos volt a témához kapcsolódó további kutatások "élő", még publikálás előtti ismerete, mint pl. a Fuglede sejtés cáfolatával kapcsolatban, mivel ez jelentős lökést adott abba az irányba, hogy spektrális halmazokat is vizsgáljunk meg (ha egyszer mégsem biztos, hogy egy spektrális halmaz parkettáz és viszont).

A 3. Fejezet irodalmi háttere is tartogatott izgalmakat. A témában legjelentősebbnek mondható [3] cikk sokáig csak Comptes Rendus kivonatban létezett [2], s ez nem volt véletlen, mert a szerzők a bonyolult cikk lényeges hibáit kellett kijavítsák a végső megjelentetéshez. Az egyik szerző honlapján található korábbi cikk változattal kapcsolatban én magam is kétségbeesetten jeleztem a szerzőknek, hogy lényeges hiba van a gondolatmenetben. Szerencsére végül a cikkük elkészült – körülbelül mire mi magunk is elkészültünk Aline Bonamival.

Hasonló izgalmakkal járt a Hardy-Littlewood féle majoráns probléma, pontosabban az ezzel kapcsolatos Montgomery sejtés állásának felderítése is. Az évtizede a köztudatba bedobott [36], de hibás megoldás után munkánk befejező szakaszában kaptuk az első kézből származó információt a megoldásról (ami még máig sem jelent meg, csak preprintben [37]). Mint fentebb írtuk, ez lényeges támpontja volt a mi konstrukciónknak is.

Ha ebből tanulságot lehet levonni, akkor az csak az lehet, hogy feltétlenül fontos az irodalom, a klasszikus szerzők, egyáltalán, a bárhol, bárki által hivatkozott, jelzett munkák figyelmes átolvasása, nem szabad elsiklani semmi felett: ugyanakkor az "élő", személyes információk sem nélkülözhetőek egy komolyabb kérdés hátterének, előzményeinek sikeres felderítéséhez.

III. Új tudományos eredmények és azok hasznosítási lehetőségei**

III.1. Fordított Markov egyenlőtlenségek a komplex síkon. E körben a legfontosabb eredményünk talán a következő.

1.1.12. Tétel (Halász és Révész). *Legyen $K \subset \mathbb{C}$ tetszőleges konvex tartomány, amelynek $w(K)$ a minimális szélessége és $d(K)$ az átmérője. Akkor minden $p \in \mathcal{P}_n(K)$ esetén*

$$\frac{\|p'\|}{\|p\|} \geq C(K)n \qquad \text{ahol} \qquad C(K) = 0.0003\frac{w(K)}{d^2(K)} \ . \tag{32}$$

Hogy ez valóban a helyes nagyságrendet adja meg, sőt abszolút (igaz, kétmilliós) konstans szorzótól eltekintve még a konstansnak a geometriai paraméterektől való függésében is pontos, az következik az alábbi fordított irányú tételből.

1.1.13. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, összefüggő halmaz d átmérővel és w minimális szélességgel. Ekkor minden $n > n_0(K) := 2(d/16w)^2 \log(d/16w)$ mellett létezik olyan $p \in \mathcal{P}_n(K)$ pontosan n fokú polinom, amelyre*

$$\|p'\| \leq \ C'(K)\ n\ \|p\| \qquad \text{ahol} \qquad C'(K) := 600\ \frac{w(K)}{d^2(K)} \ . \tag{33}$$

Jegyezzük meg, hogy ez a megfordítási tétel nem csak konvex tartományokról szól, hanem sokkal általánosabban is, azaz azt mondhatjuk, hogy a konvex tartományoknál az $M_n(K)$ inverz Markov-faktor a lehető legnagyobb nagyságrendet éri el. Mint láttuk, ez pl. nem így történik az I intervallumnál, mivel ott a nagyságrend csak $\sqrt{n}$. (De erre az esetre ez a megfordítási tétel sem alkalmazható $w(I) = 0$ miatt.)

A fenti tétel azonban egyes esetekben, amikor a konvex tartományunk határgörbéjének görbületről pontosabb információnk van, a konstans tekintetében is tovább pontosítható. Erőd János tételét általánosítva, a következőt tudjuk igazolni.

1.1.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy a konvex K tartomány $\Gamma = \partial K$ határgörbéjén az ívhossz mérték szerint majdnem mindenütt létező görbület majdnem minden pontban legalább κ. Akkor minden $p \in \mathcal{P}_n(K)$ esetén*

$$\|p'\| \geq \frac{\kappa}{2}n\|p\| \ . \tag{34}$$

**Eredményeink elméleti matematikai jellegűek, konkrét gyakorlati, ipari, mezőgazdasági stb. alkalmazás nem motiválta a kutatásainkat. Ennek megfelelően az eredmények alkalmazása, felhasználása is alapvetően az elméleti matematika egyes kapcsolódó területein várható. Az általunk látott illetve várt alkalmazási lehetőségekre az egyes témák tárgyalása során igyekeztünk rámutatni.

E tárgyban elért eredményeinknek az approximációelméletben lehet felhasználása. Mivel az eredmények nagyon általánosak, sok olyan esetre, tartományra is kiszámíthatóvá váltak a fordított Markov konstansok, amelyekre eddig nem ismertük még a helyes nagyságrendet sem. Pl. a fenti 1.1.16 Tétellel kiszámítható nemcsak a már Erőd J. által megoldott ellipszis, de pl. a

$$B^p := \{(x,y) \,:\, |x|^p + |y|^p \le 1\}, \quad \Gamma^p := \partial B^p = \{(x,y) \,:\, |x|^p + |y|^p = 1\}$$

ℓ_p egységgömb, illetve az ennek affin képeként adódó $0 < b \le 1$ paraméterű "ℓ_p-ellipszis",

$$B^p_b := \{(x,y) \,:\, |x|^p + |y/b|^p \le 1\}, \quad \Gamma^p_b := \partial B^p_b = \{(x,y) \,:\, |x|^p + |y/b|^p = 1\}$$

tartományok pontos $M_n(K)$ konstansa is, ld. a diszertációban.

III.2. Pozitív definit függvényekre vonatkozó Turán féle extremális probléma. Mint említettük, tekinthetőek a következő fügvényosztályok is.

$$(35)\ \mathcal{F}_1(\Omega) := \left\{ f \in L^1(G) \ :\ \operatorname{supp} f \subset \Omega,\ \ f \,\text{pozitiv definit} \right\},$$

$$(36)\ \mathcal{F}_\&(\Omega) := \left\{ f \in L^1(G) \cap C(G) \ :\ \operatorname{supp} f \subset \Omega,\ \ f \,\text{pozitiv definit} \right\},$$

$$(37)\ \mathcal{F}_c(\Omega) := \left\{ f \in L^1(G) \ :\ \operatorname{supp} f \subset\subset \Omega,\ \ f \,\text{pozitiv definit} \right\},$$

$$(38)\ \mathcal{F}(\Omega) := \left\{ f \in C(G) \ :\ \operatorname{supp} f \subset\subset \Omega,\ \ f \,\text{pozitiv definit} \right\}.$$

Az $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\&$ osztályokban $\operatorname{supp} f$ csak zártnak van feltételezve, de nem feltétlenül kompakt; $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_c$ esetében az f függvény lehet nem folytonos is.

A megfelelő Turán konstansok:

$$(39)\quad \mathcal{T}^{(1)}_G(\Omega) \text{ or } \mathcal{T}^{\&}_G(\Omega) \text{ or } \mathcal{T}^{c}_G(\Omega) \text{ or } \mathcal{T}_G(\Omega) := \\ \sup \left\{ \frac{\int_G f}{f(0)} \ :\ f \in \mathcal{F}_1(\Omega) \text{ or } \mathcal{F}_\&(\Omega) \text{ or } \mathcal{F}_c(\Omega) \text{ or } \mathcal{F}(\Omega),\ \text{resp.} \right\}.$$

Általában komplex értékű $f : G \to \mathbb{C}$ függvényeket kellene tekintsünk. De a pozitív definitás értelemezéséből azonnal látható, hogy az $\overline{f}$ konjugált függvény, és így még a $\varphi := \Re f$ valós rész függvény is pozitív definit, miközben benne maradnak ugyanabban az osztályban. Ugyancsak teljesül $f(0) = \varphi(0)$ és, lévén pozitív definit függvény tartója szimmetrikus, $\int f = \int \varphi$ is. Így az, hogy valós fügvényekre szorítkozunk, nem változtat a Turán konstans értékén.

Mindenek előtt a következőt igazoltuk §2.2.2-ben.

2.1.12. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Tetszőleges G LCA csoportban a fenti Turán-konstans definíciók ekvivalensek:*

$$\mathcal{T}_G^{(1)}(\Omega) = \mathcal{T}_G^{\&}(\Omega) = \mathcal{T}_G^{c}(\Omega) = \mathcal{T}_G(\Omega)\,. \tag{40}$$

Fürstenberg [23] egy $S \subset G$ halmazt egy topologikus kommutatív (fél)csoportban *szindetikus* halmaznak nevez, ha van olyan kompakt $K \Subset G$ halmaz, hogy bármely $g \in G$ elemre legyen $k \in K$ úgy, hogy $gk \in S$; másszóval topologikus csoportok esetén $\cup_{k \in K} S k^{-1} = G$. Ezzel a fogalommal dolgozva azután [23, Proposition 3.19 (a)] kimondja, hogy ha $S \subset \mathbb{Z}$ pozitív egyenletes aszimptotikus felső sűrűségű (Fürstenberg szóhasználatával: pozitív Banach sűrűségű), akkor $S - S$ egy szindetikus halmaz.

A 2. Fejezet egyik nóvuma az egyenletes aszimptotikus felső sűrűség (e.a.f.s.) általános értelmezése LCA csoportokon. Mégpedig tetszőleges ν mértékre nézve értelmezzük ezt a sűrűség-fogalmat a következőképpen.

2.3.5. Definíció. Legyen G egy LCA csoport és $\mu := \mu_G$ a Haar mértéke. Jelölje a Borel halmazok σ-algebráját $\mathcal{B}$, és ezen belül a kompakt lezárású Borel-mérhető halmazokat $\mathcal{B}_0$. Ha ν egy másik mérték G-n a mérhető halmazok $\mathcal{S}$ σ-algebrájával, akkor definiáljuk a ν mérték μ-re vonatkozó e.a.f.s.-ét mint

$$\overline{D}(\nu;\mu) := \inf_{C \Subset G} \sup_{V \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_0} \frac{\nu(V)}{\mu(C+V)}\,. \tag{41}$$

Speciálisan, ha $A \subset G$ Borel mérhető és $\nu = \mu_A$ a μ nyoma az A-n, akkor

$$\overline{D}(A) := \overline{D}(\nu_A;\mu) := \inf_{C \Subset G} \sup_{V \in \mathcal{B}_0} \frac{\mu(A \cap V)}{\mu(C+V)}\,. \tag{42}$$

Ha $\Lambda \subset G$ tetszőleges (pl. diszkrét) halmaz és $\gamma := \gamma_\Lambda := \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$ a Λ számosság-mértéke, akkor

$$\overline{D}^{\#}(\Lambda) := \overline{D}(\gamma_\Lambda;\mu) := \inf_{C \Subset G} \sup_{V \in \mathcal{B}_0} \frac{\#(\Lambda \cap V)}{\mu(C+V)}\,. \tag{43}$$

Azt, hogy a klasszikus fogalom valódi kiterjesztéséhez jutottunk, a következő tétel mondja meg.

2.3.6. Tétel. *Legyen K tetszőleges konvex test $\mathbb{R}^d$-ben és normalizáljuk a Haar mértéket úgy, hogy az megegyezzen $\mathbb{R}^d$-n a szokásos $|\cdot|$ térfogattal (Lebesgue mértékkel). Legyen ν egy tetszőleges mérték a mérhető halmazok $\mathcal{S}$ σ-algebrájával. Akkor*

$$\overline{D}(\nu;|\cdot|) = \overline{D}_K(\nu)\,. \tag{44}$$

Hasonló állítás érvényes $\mathbb{Z}^d$-re is.

Az eredeti e.a.f.s. fogalomban az egyenletességnek az eltolások szempontjából volt jelentősége: ehhez lényeges kiindulópont, hogy a viszonyítási alapnak tekintett μ mértékünk legyen eltolás-invariáns. Azért nagyon természetes LCA csoportokon dolgozni, mert ezen a struktúrán van lényegében egyértelmű eltolás-invariáns μ mérték, t.i. maga a Haar-mérték. Ezért rögzítjük a nevezőben szereplő mértéket így (bár elvileg tetszőleges mértékeket hasonlítgathatnánk így össze, csak az már más fogalom volna).

Az új fogalom általánosságban is teljesíti a természetes elvárásainkat: monoton ν-ben, ha $\nu = \mu$, akkor az e.a.f.s. 1 lesz, az üres halmazé, vagy általában a kis (véges, kompakt lezárású stb.) halmazoké pedig 0. Teljesül a szubadditivitás is:

2.3.23. Lemma (szubadditivitás). *Legyen $\nu_0 = \sum_{j=1}^n \nu_j$ mértékek egy összege úgy, hogy minden mérték a mérhető halmazok $\mathcal{S}$ σ-algebráján legyen értelmezve. Ekkor $\overline{D}(\nu_0, \mu) \leq \sum_{j=1}^n \overline{D}(\nu_j, \mu)$. Speciálisan ez teljesül egyetlen megadot ν mérték mellett akkor, ha $A_0 = \cup_{j=1}^n A_j$, $\mathcal{S}$-mérhető hamazok egy diszjunkt úniója, és $\nu_j := \nu|_{A_j}$, a ν mérték megfelelő nyoma $j = 0, 1, \ldots, k$ mellett.*

Ezt pl. fel kell használjuk a Fürstenbergtől olvasott fenti propozíció LCA csoportokra történő kiterjesztéséhez is. Igazolni tudtuk a következőt.

2.3.16. Tétel. *Legyen G egy LCA csoport és tegyük fel, hogy az $S \subset G$ halmaznak a számosság mértékkel pozitív, de véges az e.a.f.s.-e: $\overline{D}^{\#}(S) = \overline{D}(\#|_S; \mu) > 0$. Ekkor az $S - S$ differencia-halmaz szindetikus.*

A fenti e.a.f.s. fogalom az elvárható módon, jól kezeli a pakolások, parkettázások, fedések eltolás-halmazainak sűrűségét is.

2.4.8. Állítás. *Tegyük fel, hogy $H \in \mathcal{B}$ és $H + \Lambda \leq G$ (H pakol G-ben a $\Lambda \subset G$ eltolás-halmazzal), azaz $(H - H) \cap (\Lambda - \Lambda) \subseteq \{0\}$. Ekkor Λ teljesíti, hogy $\overline{D}^{\#}(\Lambda) \leq 1/\mu(H)$.*

2.4.9. Állítás. *Tegyük fel, hogy $H \in \mathcal{B}_0$ és hogy lefedi G-t a $\Lambda \subset G$ eltolás-halmazzal ("$H + \Lambda \geq G$"), azaz $H + \Lambda$ G μ-majdnem minden pontját tartalmazza. Ekkor szükségképpen $\overline{D}^{\#}(\Lambda) \geq 1/\mu(H)$.*

A továbbiakban tehát használjuk ezt az e.a.f.s. fogalmat!

Kompakt csoportokra nincs szükség aszimptotikus fogalmakra és egyszerűbben megkapjuk a kívánt becslést.

2.6.1. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Legyen G egy kompakt Abel csoport, $\Lambda \subseteq G$, $\Omega \subseteq G$ egy 0-ra szimmetrikus nyílt halmaz, és tegyük fel, hogy $(\Lambda - \Lambda) \cap \Omega \subseteq \{0\}$. Legyen $f \in L^1(G)$ egy folytonos és pozitív definit függvény, amelynek a tartója Ω-ban helyezkedik el. Akkor*

$$\int_G f(x)\,dx \le \frac{\mu(G)}{\#\Lambda} f(0). \tag{45}$$

Más szóval, $\mathcal{T}_G(\Omega) \le \mu(G)/\#\Lambda$.

Ha a csoport csak lokálisan kompakt, és túllépünk a klasszikus csoportok keretein, akkor viszont lényeges szerepet kap az imént értelmezett e.a.f.s. fogalma.

2.6.4. Tétel. *Legyen $\Omega \subset G$ egy 0-ra szimmetrikus nyílt környezete 0-nak és $\Lambda \subset G$ egy részhalmaz, amely Ω-val teljesíti az $\Omega \cap (\Lambda - \Lambda) = \{0\}$ "pakolási típusú" feltételt. Ha $\rho := \overline{D}^{\#}(\Lambda) > 0$, akkor $\mathcal{T}_G(\Omega) \le 1/\rho$.*

Módszereinkkel nem konvex, sőt nem összefüggő, "szétszórt" halmazokra is kaptunk tételeket. A következő pl. azt mondja ki, hogy az intervallumok, konvex halmazok pl. egy dimenzióban általában a lehető legnagyobb Turán-konstansot adják.

2.6.16. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ egy véges m mértékű 0-ra szimmetrikus nyílt halmaz. Ekkor*

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}(\Omega) \le \frac{m}{2} . \tag{46}$$

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{Z}^d$ egy m elemű 0-ra szimmetrikus és azt tartalmazó halmaz. Ekkor

$$\mathcal{T}_{\mathbb{Z}^d}(\Omega) \le \frac{m+1}{2} . \tag{47}$$

A disszertációban sok példa, alkalmazás és konkrét eset kidolgozás szerepel. Például "direktben" elég nehéznek, megközelíthetetlennek látszik a következő, amit a $\Lambda := b\mathbb{Z}$ eltolási halmazzal a fentiekből azonnal megkaphatunk.

2.6.20. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Legyen $0 < b < a \le 2b$ és legyen*

$$\Omega = (-a, -b) \cup (-b, b) \cup (b, a).$$

Ekkor $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(\Omega) = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(-b, b) = b$.

A spektrális halmazok ezen szerkezeti tulajdonságát is ki tudtuk használni a Turán-konstans becslésére. Előbb egy egyszerűbb esetet fogalmazunk meg, amikor G véges.

2.7.1. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Legyen G egy véges Abel csoport, $\Omega, H \subseteq G$, $\Omega \subseteq H - H$, és H spektrális halmaz a $T \subseteq \widehat{G}$ spektrummal. Ekkor tetszőleges pozitív definit függvényre G-n, amelynek tartója Ω-ban van, fennáll*

$$\sum_{x \in G} f(x) \leq |H| f(0). \tag{48}$$

Más szóval $\mathcal{T}_G(\Omega) \leq |H|$.

2.7.2. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Legyen H korlátos, nyílt, spektrális halmaz $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor az $\Omega = H - H$ szimmetrikus nyílt halmazra $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}(\Omega) = |H|$.*

Ez maga után vonja Aresztov és Berdysheva idézett tételét. (Arról, hogy miért is, a részleteket ld. a diszertációban).

A pontonkénti Turán problémára térve, vezessük be a következő jelölést.

$$H(\Omega, z) := \{k \in \mathbb{N}_2 \,:\, kz \in \Omega,\ -kz \in \Omega\} \tag{49}$$

2.9.1. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Legyen $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ tetszőleges nyílt halmaz és $z \in \Omega \cap (-\Omega)$. Ekkor*

$$\mathcal{M}(\Omega, z) = \frac{1}{2} M(H(\Omega, z)).$$

Legyen

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}(z) := \{nz \pmod{\mathbb{T}^d} \mid n \in \mathbb{Z}\}. \tag{50}$$

Ha $\#\mathcal{Z} = m$ akkor írjuk a következőt:

$$H_m(\Omega, z) := \{k \in [2, m/2] \,:\, kz \in \Omega,\ -kz \in \Omega\} = H(\Omega, z) \cap [2, m/2]. \tag{51}$$

Továbá, tetszőleges $H \subset \mathbb{Z}$ halmazra legyen

$$H(m) := \{k \in [2, m/2] \,:\, \exists h \in H \ \text{ úgy, hogy } \pm k \equiv h \pmod{m}\}.$$

2.9.4. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Legyen $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{T}^d$ tetszőleges nyílt halmaz és $z \in \Omega \cap (-\Omega)$. Ekkor a (9) extremális mennyiség csak a $\mathcal{Z}$ halmaztól függ.*

Ha $\mathcal{Z}$ végtelen, akkor

$$\mathcal{M}^*(\Omega, z) = \frac{1}{2} M(H(\Omega, z)). \tag{52}$$

Ha $\#\mathcal{Z} = m$ véges, akkor

$$\mathcal{M}^*(\Omega, z) = \frac{1}{2} M_m(H_m(\Omega, z)). \tag{53}$$

Eredményeinket sok konkrét problémában lehet alkalmazni. Lássunk néhány, a fentiek alapján kiszámítható esetet!

2.9.8. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Legyen $0 \in \Omega$ egy szimetrikus nyílt halmaz és $z \in \Omega$. Ekkor az (8) extremális mennyiség a következőket teljesíti:*

(i) *Ha $H(\Omega, z) = \{n\}$, akkor $\mathcal{M}(\Omega, z) = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{2n}}$.*
(ii) *Ha $H(\Omega, z) = \mathbb{N}_2 \setminus \{n\}$, akkor $\mathcal{M}(\Omega, z) = \cos\frac{\pi}{2n}$.*
(iii) *Ha $H(\Omega, z) = (n, \infty) \cap \mathbb{N}_2$, akkor $\mathcal{M}(\Omega, z) = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n+2}}$.*
(iv) *Ha $H(\Omega, z) = 2\mathbb{N} + 1$, akkor $\mathcal{M}(\Omega, z) = \frac{2}{\pi}$.*
(v) *Ha $H(\Omega, z) = 2\mathbb{N}$, akkor $\mathcal{M}(\Omega, z) = \frac{\pi}{4}$.*

Az alábbi, korábban kapott eredményünket fel tudtuk használni itt is.

2.9.10. Lemma. (lásd [51]). *Legyen $H \subseteq \mathbb{N}_2$ tetszőleges. Ekkor*

$$M(H)M(\mathbb{N}_2 \setminus H) = 2.$$

Valójában ez megadja (ii)-t, ha (i) már ismert; (iii) és a 2.9.7 Következmény, illetve (iv) és (v) is hasonlóan függenek össze, noha az irodalomban ezek más úton lettek meghatározva.

A megfelelő összefüggésnek a 12. Problémában való megfogalmazásához a következőt rögzíthetjük.

2.9.11. Következmény (Kolountzakis-Révész). *Tetszőleges $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ nyílt halmazra és $z \in \Omega$ pontra*

$$\mathcal{M}(\Omega, z)\mathcal{M}(\Omega^*, z) = \frac{1}{2},$$

ahol Ω^* bármilyen nyílt, szimmetrikus 0-t és z-t tartalmazó halmaz úgy, hogy benne van $(\mathbb{N}_2 \setminus H(\Omega, z))z$ is, de diszjunkt $H(\Omega, z)z$-től.

2.9.13. Állítás (Kolountzakis-Révész). *Tegyük fel, hogy $\Omega \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ egy nyílt halmaz. Akkor*

$$\mathcal{M}(\Omega, z) \leq \mathcal{M}^*(\Omega, z).$$

2.9.14. Következmény (Kolountzakis-Révész). *Legyen $\Omega \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ egy szimmetrikus, konvex halmaz. Akkor*

$$\mathcal{M}^*(\Omega, z) \geq w(||z||), \qquad \text{ahol} \qquad w(t) := \cos\frac{\pi}{\lceil 1/t \rceil + 1}.$$

2.9.18. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Tetszőleges korlátos nyílt $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ halmazra és $z \in \mathbb{R}^d$ pontra*

$$\lim_{\alpha \to +0} \mathcal{M}^*(\alpha\Omega, \alpha z) = \mathcal{M}(\Omega, z).$$

2.9.23. Tétel (Kolountzakis-Révész). *Legyen $\Omega = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d \in \mathbb{T}^d$. Akkor*

(i) $\mathcal{M}^*((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d, z) = 1$ *ha* $z \notin \mathbb{Q}^d$.

Továbbá, ha $z \in \mathbb{Q}^d$, $z = (\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_d}{q_d})$, *ahol* $(p_j, q_j) = 1$, $q_j = 2^{s_j} t_j \quad (s_j \in \mathbb{N})$, $t_j \in 2\mathbb{N}+1 \quad (j = 1, \dots, d)$ *és* $m := [q_1, \dots, q_d] = 2^s t \quad t \in 2\mathbb{N}+1$, *akkor vagy*

(ii) $1 \leq s = s_1 = \cdots = s_d$, *és akkor* $\mathcal{M}^*((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d, z) = \frac{1}{2}(1 + \cos\frac{2\pi}{m})$, *vagy*

(iii) $s = 0$ *vagy* $\exists j$, $1 \leq j \leq d$ *amelyre* $s_j < s$ *és akkor* $\mathcal{M}^*((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d, z) = 1$.

Mint említettük, ezeknek az extremális problémáknak az additív számelméletben (egyenletes eloszlás, van der Corput halmazok [41]) van talán a legközvetlenebb alkalmazása, de pl. a Beurling prímek eloszlásával, pontosabban a Beurling féle ζ-függvény gyökeinek eloszlásával kapcsolatban is felmerül ezzel összefüggő probléma [67] - többet ld. a disszertációban. De könnyen kiderülhet, hogy munkánk legjobban alkalmazható "darabja" a 2.3.5 Definíció lesz.

III.3. Idempotens trigonometrikus polinomok koncentrációja.

3.1.7. Tétel (Bonami-Révész). *Minden $0 < p < \infty$ esetén p-koncentráció van. Továbbá, ha p nem páros egész szám, akkor teljes koncentráció áll fenn, azaz $c_p = 1$. A páros egészeket tekintve, c_2 értékét (20) adja meg, továbbá $0.495 < c_4 \leq 1/2$, és minden további páros egészre $0.483 < c_{2k} \leq 1/2$. Ezen felül, hacsak nem $p = 2$, ugyanezen a szinten van koncentráció tetszőlegesen nagy előírt hézagok mellett is. Ugyanakkor $p = 2$-re tetszőleges nagy hézagok előírása esetén a koncentráció szintje 0-ra csökken.*

Mérhető halmazokra eredményeink épp olyan jók $p > 1$ mellett. Módszereink határaihoz érkezve, nyitott kérdésként hagyjuk meg azt, hogy van-e mérhető halmazokra is pozitív koncentráció $0 < p \leq 1/2$ esetén, illetve igaz-e teljes koncentráció $0 < p \leq 1$ mellett?

3.1.8. Tétel (Bonami-Révész). *Minden $1/2 < p < \infty$ esetén mérhető halmazokra is pozitív p-koncentráció áll fenn. Ha $p > 1$ nem páros egész, akkor mérhető halmazokra is teljes koncentráció van. Ha $p = 2$, akkor a mérhető halmazokra vonatkozó koncentráció szintje a (20) szerinti, $p = 4$-re $0.495 < \gamma_4 \leq 1/2$, és nagyobb páros egészekre egyenletesen teljesül $0.483 < \gamma_{2k} \leq 1/2$. Továbbá hacsak nem $p = 2$, akkor ugyanaz a koncentrációs szint elérhető tetszőlegesen nagy előírt hézagok mellett is.*

Amint a módszerekről szóló 2. Fejezetben elmondtuk, a konstrukció kulcsa, hogy előbb speciális pontokban, – 0-ban, és, ha lehet, $1/2$-ben – konstruálunk teljesen koncentrálódó segéd-polinomokat nagy hézagokkal.

3.1.9. Állítás (Bonami-Révész). *Minden $p > 0$-ra, $p = 2$ kivételével, teljes p-koncentráció van tetszőleges nagy hézagokkal is a 0-ban. $p = 2$ esetén pozitív koncentráció tetszőlegesen nagy hézagokkal semmilyen $a \in \mathbb{T}$ pontban nem lehetséges.*

Vegyük észre, hogy a Dirichlet magok legalábbis $p > 1$-re teljesen koncentrálódnak a 0-ban. Kisebb p-re a Dirichlet magok nem használhatóak. Adott koncentrációs szinthez az általunk konstruált példák jóval magasabb fokszámúak. De ami a 0 pont körüli viselkedést illeti $p > 1$ esetén, ha p nem 2, valójában az az újdonság, hogy mindez tetszőlegesen nagy hézagokkal is biztosítható.

Ez az, ami nem történhet meg L^2-ben. Zygmund [50, Chapter V §9, page 380] rámutatott, Inghamnek a nagyon hézagos Fourier sorok négyzetintegráljának lényegében egyenletes eloszlására vonatkozó eredményei kapcsán: „Nothing seems to be known about possible extensions to classes L^p, $p \neq 2$". Később Erdős és Rényi [19], illetve Turán [46] megmutatták, hogy $p > 2$-re ez az Ingham féle tétel nem megy át, de legjobb tudomásunk szerint $0 < p < 2$ esetére ez a kérdés még nyitva állt. Eredményeinkből következik, hogy itt is negatív a válasz. A későbbiekben ezt még erősebb formában is megmutatjuk.

Ami az $1/2$ pont környezetét illeti, ott a megfelelő eredményünk így néz ki.

3.1.10. Állítás (Bonami-Révész). *Teljes p-koncentráció van tetszőlegesen nagy előírt hézagokkal $1/2$-ben valahányszor $p > 0$ nem egy páros egész. Másfelől ha $p = 2k \in 2\mathbb{N}$, akkor $c_{2k}(1/2) = 1/2$.*

3.1.13. Tétel (Bonami-Révész). *Minden $0 < p < \infty$, p nem páros egész esetén ha egy 0-ra szimmetrikus pozitív mértékű mérhető E halmaz adott, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $f \in \mathcal{T}^+$ hogy*

$$\int_{^cE} |f|^p \leq \varepsilon \int_{\mathbb{T}} |f|^p. \tag{54}$$

Továbbá f választható úgy is, hogy a Fourier-sorának $\operatorname{Gap}(f)$ hézagai tetszőlegesen nagy előírt érték felett legyenek. Ha E nyílt halmaz, vagy $p > 1$, akkor f választható idempotensnek tetszőleges p mellett.

Vizsgáltuk a koncentráció kérdését a diszkrét esetben a $\mathbb{Z}_q := \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ csoporton is.

3.13.1. Definíció (Bonami-Révész). Legyen $p > 0$. Ekkor értelmezzük $\mathbb{Z}_q$-n a következő mennyiségeket:

$$\gamma_p^\sharp(q) := \max_{f \in \mathcal{P}_q} \frac{|f(1)|^p}{\sum_{k=0}^{q-1} |f(k)|^p} \tag{55}$$

és

$$\gamma_p^\sharp := \liminf_{q \to \infty} \gamma_p^\sharp(q). \tag{56}$$

3.13.3. Tétel (Bonami-Révész). *Minden $1 < p < \infty$ mellett egyenletes p-koncentráció van $\mathbb{Z}_q$-n. Emellett $p = 2$-re a koncentráció szintje $2\gamma_2^\sharp$, ahol az utóbbi konstans a (20) alatti c_2 értékével egyezik meg, továbbá $0.495 < 2\gamma_4^\sharp \leq 1/2$. Tetszőleges $p > 2$ mellett $2\gamma_p^\sharp > 0.483$. Másfelől $p \leq 1$ esetén nincs q-ban egyenletes p-koncentráció.*

Visszatérve a $\mathbb{T}$-n vett koncentráció kérdésére, a $p = 1$ kritikus esetben a legjobb becslésünk meglepően közel jutott a teljes koncentráció eléréséhez.

3.14.1. Tétel (Bonami-Révész). *A $p = 1$ kitevőre mérhető halmazokra vonatkozó koncentráció igaz a $\gamma_1 > 0.96$ szinten. Továbbá tetszőlegesen nagy N-re, található olyan koncentrálódó idempotens is, amelynek egymást követő frekvenciái között a hézagai legalább N nagyságúak.*

3.9.3. Definíció. Legyen $0 < p < \infty$ és $q \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy f teljesíti a *rács-feltételt a K konstanssal*, ha

$$\sum_{k=0}^{q-1} \left| f\left(\frac{k}{q}\right) \right|^p \leq K \sum_{k=0}^{q-1} \left| f\left(\frac{2k+1}{2q}\right) \right|^p. \tag{57}$$

3.14.2. Definíció. Legyen $0 < p < \infty$ és $q \in \mathbb{N}$. Azon polinomok halmazát, amelyek teljesítik a 3.9.3 Definícióbeli (57) "rács-feltételt" a K konstanssal, $\mathcal{T}(K)$ jelöléssel jelöljük. Továbbá tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ fokszámra azt írjuk, hogy $\mathcal{T}_m(K) := \mathcal{T}(K) \cap \mathcal{T}_m$, és végül azt, hogy $\mathcal{P}(K) := \mathcal{P} \cap \mathcal{T}(K)$ és $\mathcal{P}_m(K) := \mathcal{P}_m \cap \mathcal{T}(K)$.

3.14.3. Definíció. $\mathcal{P}_{2q}(K)$ 3.14.2 Definíció szerinti értelmezése mellett legyen

$$\Gamma_p^\star := \sup_{K<\infty} \liminf_{q \to \infty} \Gamma_p^\star(q, K), \quad \Gamma_p^\star(q, K) := \sup_{R \in \mathcal{P}_{2q}(K)} \frac{\left| R\left(\frac{1}{2q}\right) \right|^p}{\sum_{k=0}^{q-1} \left| R\left(\frac{2k+1}{2q}\right) \right|^p}. \tag{58}$$

3.14.8. Tétel (Bonami-Révész). *Legyen $p > 1/2$ nem egy páros egész, és legyenek $1 < r, s$ olyanok, hogy $p/r + p/s = 1$. Akkor mérhető halmazokra p-koncentráció van, és ennek szintjére $\gamma_p \geq 2 \cdot \Gamma_r^{\star p/r} \cdot \Gamma_s^{\star p/s}$; továbbá p-koncentráció van hézagokkal is ugyanezen a szinten.*

Lényegében ezen az úton érjük el a fent már kimondott 3.14.1. Tételt is.

Módszereink és eredményeink alkalmazásával közvetlenül adódik két klasszikus problémában is a korábbaiknál pontosabb, élesebb válasz. Fentebb említettük Zygmund kérdését arról, hogy hézagos Fourier-sorok L^p normájának eloszlása a $\mathbb{T}$ körön a $p \neq 2$ esetén is lényegében egyenletessé válik-e az előírt hézagokhoz reciprokához mérten hosszabb intervallumokon? Most idézzük fel Wiener [49] egy problémáját. Ha f pozitív definit, akkor nyilván $f(0) = \|f\|_\infty \geq |f(x)|$ minden $x \in \mathbb{T}$. Wiener megmutatta, hogy hasonló L^2-ben, és ennek következtében p páros egész értékeire is igaz: ha f pozitív definit, és $f \in L^2(-\varepsilon, \varepsilon)$ akkor már $f \in L^2(\mathbb{T})$. De mi van más p kitevők esetén? Az derült ki, hogy ha $p \neq 2\mathbb{N}$, akkor vannak ellenpéldák, ld. [42, 48].

Zygmund és Wiener problémái kapcsán nekünk az összes eddigi ellenpéldát erőstve, és egyben közös (pozitív definit és hézagos) – sőt, "lényegében idempotens" – ellenpéldát sikerült adni. Pontosabban fogalmazva, a következőket tudtuk megmutatni.

3.15.1. Tétel (Bonami-Révész). *Minden $0 < q \leq p < 2$, esetén, valahányszor egy 0-ra szimmetrikus E nyílt halmaz, melynek mértéke $|E| > 0$ pozitív, meg van adva, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $f \in \mathcal{T}^+$ amely teljesíti, hogy*

$$\int_{^cE} |f|^p \leq \varepsilon \left(\int_{-1/2}^{+1/2} |f|^q \right)^{p/q}. \tag{59}$$

Ugyanez igaz $q < p$ mellett, ha p nem is feltétlenül egész, feltéve, hogy q elég közel van p-hez, azaz $q > q(p)$, ahol $q(p) < p$.

3.15.2. Tétel (Bonami-Révész). *Legyen $0 < p < \infty$, és $p \notin 2\mathbb{N}$. Akkor tetszőleges $E \subset \mathbb{T}$ mérhető, szimmetrikus halmazra, amelyre $|E| > 0$ és tetszőleges $q < p$-re, van olyan f függvény a $H^q(\mathbb{T})$ Hardy térben, melynek Fourier együtthatói nemnegatívak, és amelynek pontonkénti peremfüggvénye, f^*, $L^p(^cE)$-be esik, míg $f^* \notin L^p(\mathbb{T})$. Továbbá, f vehető ∞-hez tartóan nagy hézagokkal a Fourier-sorában.*

A 3.1.13 Tétel helyett a 3.15.1 Tétel felhasználásával a következőt kapjuk.

3.15.3. Tétel (Bonami-Révész).

(i) *Legyen* $p > 2$ *és* $p \notin 2\mathbb{N}$, *és tegyük fel, hogy* $\ell \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $2\ell < p < 2(\ell+1)$. *Akkor tetszőleges szimmetrikus nyílt* $U \subset \mathbb{T}$ *halmazra, amelyre* $|U| > 0$, *és* $q > q(p)$ *mellett, van olyan pozitív definit* $f \in L^{2\ell}(\mathbb{T})$ *függvény, amelynek negatív frekvenciákhoz tartozó együtthatói 0-k, és amelyre* $f \notin L^q(\mathbb{T})$ *miközben* f *benne van* $L^p({}^cU)$*-ban.*

(ii) *Legyen* $0 < p < 2$. *Ekkor tetszőleges* $U \subset \mathbb{T}$ *szimmetrikus nyílt halmazra, amelyre* $|U| > 0$, *és tetszőleges* $s < q < p$ *mellett, van olyan* f *függvény a* $H^s(\mathbb{T})$ *Hardy térben, amelynek Fourier együtthatói nemnegatívak, és amelyre* $f \notin H^q(\mathbb{T})$ *miközben* f^* *benne van* $L^p({}^cU)$*-ben.*

IV. Irodalom

IV. 1. Hivatkozások

[1] B. Anderson, J. M. Ash, R. L. Jones, D. G. Rider, B. Saffari, Inégalités sur des sommes d'exponentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math*, **296** (1983), 899–902.

[2] B. Anderson, J. M. Ash, R. L. Jones, D. G. Rider, B. Saffari, L^p-norm local estimates for exponential sums, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math*, **330** (2000), 765–769.

[3] B. Anderson, J. M. Ash, R. L. Jones, D. G. Rider, B. Saffari, Exponential sums with coefficients 0 or 1 and concentrated L^p norms, *Ann. Inst. Fourier*, **57** (2007), 1377–1404.

[4] V.V. Arestov, E.E. Berdysheva, Turán's problem for positive definite functions with supports in a hexagon, *Proc. Steklov Inst. Math., Suppl.* 2001, Approximation Theory, Asymptotical Expansions, suppl. 1, S20–S29.

[5] V.V. Arestov, E.E. Berdysheva, The Turán problem for a class of polytopes, *East J. Approx.* **8**(2002), 3, 381–388.

[6] V.V. Arestov, E.E. Berdysheva, H. Berens, On pointwise Turán's problem for positive definite functions, *East J. Approx.* **9** (2003), no. 1, 31–42.

[7] J. M. Ash, Weak restricted and very restricted operators on L^2, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **281** (1984), 675–689.

[8] J. M. Ash, On concentrating idempotents, a survey, *Topics in Classical Analysis and Applications in Honor of Daniel Waterman*, L. De Carli, K. Kazarian, and M. Milman editors, World Scientific, 2008, 31-44.

[9] G. F. Bachelis, On the upper and lower majorant properties in $L^p(G)$, *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **24** (1973), 119–128.

[10] R. P. Boas, Majorant problems for Fourier series, *J. d'Analyse Math.*, **10** (1962-3), 253–271.

[11] R.P. Boas Jr., M. Kac, Inequalities for Fourier Transforms of positive functions, *Duke Math. J.* **12** (1945), 189-206.

[12] J. N. Brooks, J. B. Strantzen, Blaschke's rolling ball theorem in $\mathbb{R}^n$, *Mem. Amer. Math. Soc.* **80, # 405**, American Mathematical Society, 1989.

[13] C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **32** (1911), 193-217.

[14] M. Cowling, Some applications of Grothendieck's theory of topological tensor products in harmonic analysis, *Math. Ann.*, **232** (1978), 273–285.

[15] M. Déchamps-Gondim, F. Lust-Piquard, H. Queffélec, Estimations locales de sommes d'exponentielles, *C. R: Acad. Sci. Paris Ser. I. Math*, **297** (1983), 153–157.

[16] M. Déchamps-Gondim, F. Lust-Piquard, H. Queffélec, Estimations locales de sommes d'exponentielles, *Publ. Math. Orsay* 84-01, No.1 (1984), 1–16.

[17] Y. Domar, An extremal problem for positive definite functions, *J. Math. Anal. Appl.* **52** (1975), 56-63.

[18] T. Erdélyi, Inequalities for exponential sums via interpolation and Turán type reverse Markov inequalities, in "Frontiers in Interpolation and Approximation" (in memory of Ambikeshwar Sharma), N. K, Govil, H. N. Mhaskar, R. N. Mohapatra, Z. Nashed, J. Szabados eds., Taylor and Francis Books, Boca Raton, Florida, 2006, 119-144.

[19] P. Erdős, A. Rényi, On a problem of A. Zygmund, *Studies in mathematical analysis and related topics*, Stanford University Press, Stanford, California, 1962, 110–116.

[20] J. Erőd, Bizonyos polinomok maximumának alsó korlátjáról, *Mat. Fiz. Lapok* **46** (1939), 58-82 (in Hungarian). See also `JFM 65.0324.02` and `Zbl 0021.39505`. English translation: Erőd, János, On the lower bound of the maximum of certain polynomials. (Translated from the 1939 Hungarian original by Zsuzsanna Erő and Bálint Farkas.) *East J. Approx.* **12** (2006), no. 4, 477–501.

[21] G. Faber, Über Tschebyscheffsche Polynome, *J. Reine Angew. Math.* **150** (1919), 79–106.

[22] L. Fejér, Über trigonometrische Polynome, *J. angew. Math.* **146** (1915), 53-82.

[23] H. Fürstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1981.

[24] A. Garsia, E. Rodemich, H. Rumsey, On some Extremal Positive Definite Functions, *J. Math. Mech.* **18** # 9 (1969), 805–834.

[25] D.V. Gorbachev, An extremal problem for periodic functions with supports in the ball, *Math. Notes* **69** (2001), 3, 313-319.

[26] D. V. Gorbachev, V.I. Ivanov, Yu. D. Rudomizina, Extremal problems for periodic functions with conditions on its values and Fourier coefficients, (Russian), *Izvestiya of the Tula State University, Ser. Mathematics, Mechanics, Informatics* **10** (2004), #1 76–104.

[27] D. V. Gorbachev, A. S. Manoshina, The extremal Turán problem for periodic functions with small support. (Russian) *Proceedings of the IV International Conference "Modern Problems of Number Theory and its Applications"* (Tula, 2001). *Chebyshevskiĭ Sb.* **2** (2001), 31–40; see also as `arXiv:math.CA/0211291 v1 19 Nov 2002`.

[28] D. V. Gorbachev, A. S. Manoshina, Turán Extremal Problem for Periodic Functions with Small Support and Its Applications, *Mathematical Notes*, **76** (2004) no. 5, 688-200.

[29] B. Green, S. Konyagin, On the Littlewood problem modulo a prime, *Canadian J. of Math.* , to appear, arXiv:math.CA/0601565v2, 2006.

[30] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Notes on the theory of series (XIX): a problem concerning majorants of Fourier series, *Quart. J. Math. Oxford*, **6** (1935), 304–315.

[31] A. E. Ingham, Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, *Math. Zeitschrift*, **41** (1936), 367-379.

[32] V. I. Ivanov, On the Turán and Delsarte problems for periodic positive-definite functions. (Russian) *Mat. Zametki* **80** (2006), no. 6, 934–939; translation in *Math. Notes* **80** (2006), no. 5-6, 875–880.

[33] V. I. Ivanov, Yu. D. Rudomazina, On the Turán problem for periodic functions with nonnegative Fourier coefficients and small support. (Russian) *Mat. Zametki* **77** (2005), no. 6, 941–945; translation in *Math. Notes* **77** (2005), no. 5-6, 870–875.

[34] N. Levenberg, E. Poletsky, Reverse Markov inequalities, *Ann. Acad. Fenn.* **27** (2002), 173-182.

[35] A. S. Manoshina, Extremum problem of Turán for functions with small support, *Izvestiya of the Tula State University. Ser. Mat. Mech. Inf.* **6** (2000) # 3, 113-116.

[36] G. Mockenhaupt, *Bounds in Lebesgue spaces of oscillatory integral operators.* Thesis for habilitaton. Siegen: Univ.-GSH Siegen, Fachbereich Mathemtik, (1996), 52 pages.

[37] G. Mockenhaupt, W. Schlag, On the Hardy-Littlewood majorant problem for random sets, arXive:math.CA/0207226v1, for a new version see http://www-math-analysis.ku-eichstaett.de/ gerdm/wilhelm/maj.pdf

[38] H. L. Montgomery, em Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[39] R. L. Page, On computing some extremal periodic positive definite functions, *Math. Comput.* **27** (1973),.

[40] M. Riesz, Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome, *Jahrsber. der deutscher Math. Vereinigung*, **23**, (1914), 354–368.

[41] I. Z. Ruzsa, Connections between the uniform distribution of a sequence and its differences, in: *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **34**, *G. Halász, ed.*, North Holland, 1981, 1419-1443.

[42] S. Shapiro, Majorant problems for Fourier coefficients, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **26** (1975), 9-18.

[43] C. L. Siegel, Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und damit zusammenhängendes Extremalproblem, *Acta Math.* **65** (1935), 307–323.

[44] S. B. Stechkin, An extremal problem for trigonometric series with nonnegative coefficients, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **23** (1972), 3-4, pp 289-291 (Russian).

[45] T. Tao, Integral norms concentration under gap condition, *e-mail letter to Szilárd Révész*, June 17, 2006.

[46] P. Turán, On a Certain Problem in the Theory of Power Series with Gaps, *Studies in mathematical analysis and related topics*, Stanford University Press, Stanford, California, 1962, 404–409.

[47] P. Turán, Über die Ableitung von Polynomen, *Comp. Math.* **7** (1939), 89-95.

[48] S. Wainger, A problem of Wiener and the failure of a principle for Fourier series with positive coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969), 16-18.

[49] N. Wiener, A class of gap theorems, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (2) **3** (1934), 367–372.

[50] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, *Second edition*, **I-II**, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

IV. 2. A disszertáció a szerző következő dolgozatainak alapján készült

[51] Sz. Gy. Révész, Extremal problems and a duality phenomenon, *in* Approximation, Optimization and Computing, *(A. G. Law, C. L. Wang, eds.)*, Elsevier, 1990, 279-281.

[52] Sz. Gy. Révész, On a paper of Erőd and Turán-Markov inequalities for non-flat convex domains. *East J. Approx.*, **12** (2006), no. 4, 451–467.

[53] Sz. Gy. Révész, Turán type reverse Markov inequalities for compact convex sets. *J. Approx. Theory*, **141** (2006), no. 2, 162–173.

[54] Sz. Gy. Révész, Megemlékezés Erőd Jánosról, *Matematikai Lapok* **2008/1**, 1-8. In English see: Sz. Gy. Révész, In memoriam János Erőd, *History of Approximation Theory*, http://pages.cs.wisc.edu/∼deboor/HAT/erod.pdf.

[55] M. N. Kolountzakis, Sz. Gy. Révész, On a problem of Turán about positive definite functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), no. 11, 3423–3430.

[56] M. N. Kolountzakis, Sz. Gy. Révész, On pointwise estimates of positive definite functions with given support. *Canad. J. Math.*, **58** (2006), no. 2, 401–418.

[57] M. N. Kolountzakis, Sz. Gy. Révész, Turán's extremal problem for positive definite functions on groups. *J. London Math. Soc. (2)*, **74** (2006), no. 2, 475–496.

[58] A. Bonami, Sz. Gy. Révész, Failure of Wiener's property for positive definite periodic functions. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **346** (2008), no. 1-2, 39–44.

[59] A. Bonami, Sz. Gy. Révész, Integral concentration of idempotent trigonometric polynomials with gaps. *Amer. J. Math.*, 43 pages; to appear; http://front.math.ucdavis.edu/0707.3023.

[60] A. Bonami, Sz. Gy. Révész, Concentration of the integral norm of idempotents. In: Fractals and related fields, Proceedings of the Conference in Honor of Jacques Peyrière, 2009. 23 pages, to appear; http://uk.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0811/0811.4576v1.pdf.

[61] Sz. Gy. Révész, A discrete extension of the Blaschke Rolling Ball Theorem, preprint, 2009. See on ArXive as arXiv:0903.4815, 21 pages.

[62] Sz. Gy. Révész, Turan's extremal problem on locally compact abelian groups, preprint, 2009. See on ArXive as arXiv:0904.1824, 26 pages.

[63] Sz. Gy. Révész, On uniform asymptotic upper density in locally compact abelian groups, preprint, 2009. See on ArXive as arXiv:0904.1567, (2009), 13 pages.

IV. 3. A szerzőnek az értekezés témaköréhez kapcsolódó tárgyú további közleményei

[64] Sz. Gy. Révész, On a class of extremal problems. *Approx. Theory Appl.*, **7** (1991), no. 3, 86–96.

[65] Sz. Gy. Révész, Some trigonometric extremal problems and duality. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **50** (1991), no. 3, 384–390.

[66] Sz. Gy. Révész, The least possible value at zero of some nonnegative cosine polynomials and equivalent dual problems. *J. Fourier Anal. Appl.*, Special Issue (1995), pages 485–508.

[67] Révész, Sz. Gy., On Beurling's Prime Number Theorem, *Periodica Math. Hung.*, **28** (3), 1994, 195-210.

[68] Sz. Gy. Révész, Minimization of maxima of nonnegative and positive definite cosine polynomials with prescribed first coefficients. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **60** (1995), no. 3-4, 589–608.

[69] A. Kroó, Sz. Gy. Révész, On Bernstein and Markov-type inequalities for multivariate polynomials on convex bodies. *J. Approx. Theory*, **99** (1999), no. 1, 134–152.

[70] Sz. Gy. Révész, Y. Sarantopoulos, Chebyshev's extremal problems of polynomial growth in real normed spaces. *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, **36** (2001), no. 5, 62–81 (2002).

[71] Sz. Gy. Révész, Uniqueness of Markov-extremal polynomials on symmetric convex bodies. *Constr. Approx.*, **17** (2001), no. 3, 465–478.

[72] Sz. Gy. Révész, Uniqueness of multivariate Chebyshev-type extremal polynomials for convex bodies. *East J. Approx.*, **7** (2001), no. 2, 205–240.

[73] Sz. Gy. Révész, Y. Sarantopoulos, On Markov constants of homogeneous polynomials over real normed spaces. *East J. Approx.*, **9** (2003), no. 3, 277–304.

[74] Sz. Gy. Révész, Y. Sarantopoulos, The generalized Minkowski functional with applications in approximation theory. *J. Convex Anal.*, **11** (2004), no. 2, 303–334.

[75] Sz. Gy. Révész, Some polynomial inequalities on real normed spaces. *Publicaciones del Dpto. de Análisis del Matemático Sección 1*, **63** (2004), 111–135.

[76] L. B. Milev, Sz. Gy. Révész, Bernstein's inequality for multivariate polynomials on the standard simplex. *J. Inequal. Appl.*, (2005), no. 2, 145–163.

[77] Sz. Gy. Révész, A comparative analysis of Bernstein type estimates for the derivative of multivariate polynomials. *Ann. Polon. Math.*, **88** (2006), no. 3, 229–245.

[78] Sz. Gy. Révész, Inequalities for multivariate polynomials. Annals of the Marie Curie Fellowships, (electronic); 6 pages; `http://www.mariecurie.org/annals/`.

[79] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Tiles with no spectra in dimension 4. *Math. Scand.*, **98** (2006), no. 1, 44–52.

[80] Sz. Gy. Révész, On some extremal problems of Landau. *Serdica Math. J.*, **33** (2007), no. 1, 125–162.

[81] Sz. Gy. Révész, N. N. Reyes, G. A. M. Velasco, Oscillation of Fourier transforms and Markov-Bernstein inequalities. *J. Approx. Theory*, **145** (2007), no. 1, 100–110.

[82] Sz. Gy. Révész, Schur-type inequalities for complex polynomials with no zeros in the unit disk. *J. Inequal. Appl.*, (2007), Art. ID 90526, 10.

[83] G. A. Munoz, Sz. Gy. Révész, J. B. Seoane), Geometry of homogeneous polynomials on non-symmetric convex bodies. *Math. Scand*, **104** (2008), 1–14.

[84] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Positive bases in spaces of polynomials. *Positivity*, **12** (2008), no. 4, 691–709.

[85] D. Burns, N. Levenberg, S. Ma'u, Sz. Gy. Révész, Monge–Ampère measures for convex bodies and Berstein-Markov type inequalities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 22 pages; to appear; `http://www.ams.org/cgi-bin/mstrack/accepted_papers/tran`.

[86] P. Jamming, M. Matolcsi, Sz. Gy. Révész, On the extremal rays of the cone of positive, positive definite functions. *J. Fourier Anal. Appl.*, 22 pages; to appear; `http://www.springerlink.com/content/7t361775u3521t8n/fulltext.pdf`.